Funktechnische Arbeitsblätter

DK 621.3.076.51

Uf 12

2. Ausgabe

1 Blatt

Stern-Dreieck-Transformation

a) Die Prinzipschaltungen

In der Elektrotechnik werden häufig zwei Schaltungen angetroffen, bei denen drei einzelne Widerstände (ohmsche oder Scheinwiderstände) symmetrisch zusammengeschaltet sind. Es handelt sich um die Sternschaltung und die Dreieckschaltung.

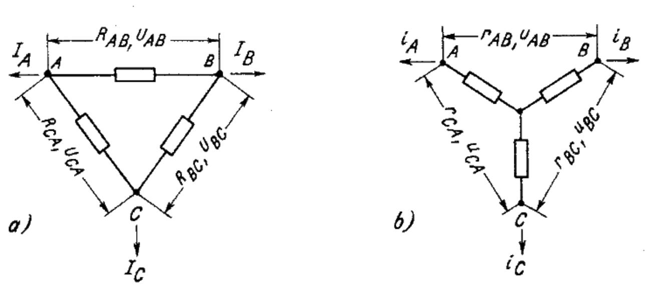


Bild 1. Grundschaltungen mit den hier verwendeten Bezeichnungen; a = Dreieckschaltung, b = Sternschaltung

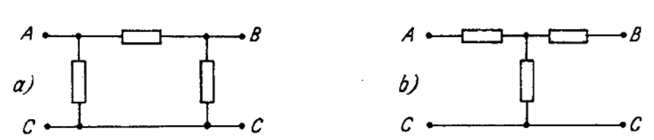


Bild 2. Darstellungsweise in der Nachrichtentechnik; a = π-Schaltung (gleichwertig der Dreieckschaltung), b = T-Schaltung (gleichwertig der Sternschaltung)

Ist die in Bild 1 gezeigte Darstellung speziell dem Starkstromingenieur aus der Theorie der Drehstromnetze geläufig, so benutzt der Nachrichtenfachmann die in Bild 2 gebrachte Anordnung in großem Umfang (z. B. für Siebschaltungen bzw. Bandfilter). In beiden Fällen ist es sehr oft erforderlich, die eine Schaltung in die andere überzuführen, sei es, um Formeln, die für die eine Anordnung gegeben sind, auf die andere umzurechnen, oder um eine Rechenoperation zu vereinfachen. Aus ähnlichen Gründen heraus geht man ja mitunter von der Parallelschaltung in die Reihenschaltung über und umgekehrt. (Vergleiche Funktechnische Arbeitsblätter Uf 11.)

b) Gleichwertigkeit beider Schaltungen

Voraussetzung für diese Umformung ist in beiden Fällen, daß die Spannungs-, Strom- und Widerstandswerte, die an den äußeren Klemmen der Widerstandsanordnung A, B, C gemessen werden, auch nach der Umformung erhalten bleiben. Das heißt, es muß unter Benutzung der Bezeichnungen von Bild 1

$$R_{AB} = r_{AB} \qquad R_{BC} = r_{BC} \qquad R_{CA} = r_{CA}$$

sein, oder wenn

$$I_A = i_A \qquad I_B = i_B \qquad I_C = i_C$$

ist, muß

$$U_{AB} = u_{AB} \qquad U_{BC} = u_{BC} \qquad U_{CA} = u_{CA}$$

sein.

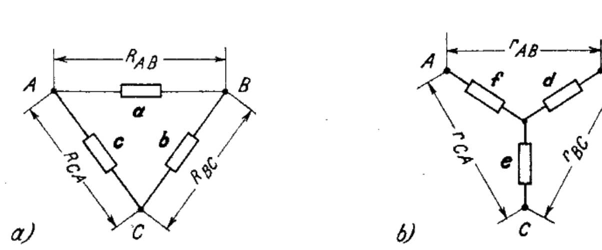


Bild 3. Die Widerstandswerte bei der Dreieckschaltung (a) und der Sternschaltung (b)

c) Umrechnungsformeln

Unter dieser Voraussetzung gelten in Bild 3 folgende Umrechnungsformeln für die Widerstandswerte:

Umrechnung von

Dreieck- in Sternschaltung	Stern- in Dreieckschaltung
$d = \frac{a \cdot b}{a+b+c}$	$a = f \cdot d\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = \frac{d \cdot e + e \cdot f + f \cdot d}{e}$
$e = \frac{b \cdot c}{a+b+c}$	$b = d \cdot e\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = \frac{d \cdot e + e \cdot f + f \cdot d}{f}$
$f = \frac{a \cdot c}{a+b+c}$	$c = e \cdot f\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right) = \frac{d \cdot e + e \cdot f + f \cdot d}{d}$

d) Kontrolle der Umrechnungsformeln

An einem Beispiel sei gezeigt, wie diese Umrechnungsformeln entstehen.

Dreieckschaltung	Sternschaltung
$R_{AB} = (c+b) \parallel a = \frac{a\,(b+c)}{a+b+c}$	$r_{AB} = d + f$

Nach Voraussetzung soll $R_{AB} = r_{AB}$ sein.
Also:

$$\frac{a \cdot (b+c)}{a+b+c} = \frac{a \cdot b + a \cdot c}{\Sigma R} = f + d \qquad (1)$$

Analog:

$$\frac{b \cdot (c+a)}{a+b+c} = \frac{b \cdot a + c \cdot b}{\Sigma R} = d + e \qquad (2)$$

und

$$\frac{c \cdot (e+b)}{a+b+c} = \frac{c \cdot a + c \cdot b}{\Sigma R} = e + f \qquad (3)$$

Addiert man mit Gleichung (1) und (3) und zieht davon Gleichung (2) ab, so erhält man:

$$2f = 2 \cdot \frac{a \cdot c}{\Sigma R}. \qquad f = \frac{a \cdot c}{a+b+c}$$

e) Anwendungsbeispiel

Es sei der Widerstand einer unabgeglichenen Wheatstoneschen Brücke zwischen den Anschlußpunkten G und H gesucht, an denen die Meßspannung zugeführt wird.

a) für den Fall, daß im Meßzweig kein Galvanometer liegt, das heißt der Strom im Meßzweig ist gleich Null, $R_G = \infty$ (Bild 4 a).

b) mit Galvanometer im Diagonalzweig, $R_G = 300\ \Omega$ (Bild 4 b).

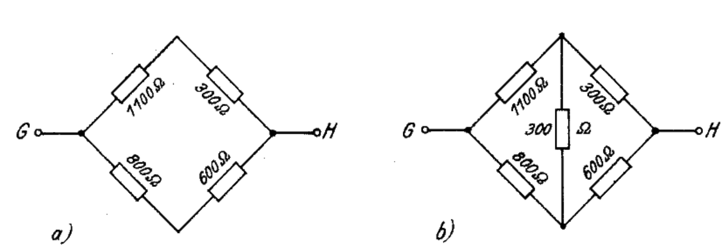


Bild 4. Brückenschaltung; a = ohne Galvanometer im Brückenzweig, b = mit Belastung des Brückenzweiges durch ein Galvanometer

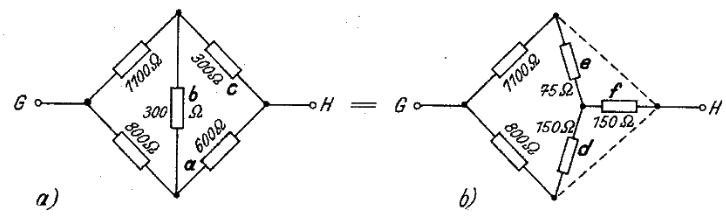


Bild 5. Berechnung des Ersatzwiderstandes einer Brückenschaltung

Fall a: $R_{GH} = 1100 + 300 \parallel 800 + 600 = 700\ \Omega$

Fall b (Bild 5):

$$d = \frac{300 \cdot 600}{300 + 600 + 300} = \frac{180\,000}{1200} = 150\ \Omega$$

$$e = \frac{300 \cdot 300}{300 + 600 + 300} = \frac{90\,000}{1200} = 75\ \Omega$$

$$f = \frac{300 \cdot 600}{300 + 600 + 300} = \frac{180\,000}{1200} = 150\ \Omega$$

$$R_{GH} = 150 + (75 + 1100 \parallel 150 + 800)$$

$$= 150 + \frac{1175 \cdot 950}{2125} = 675\ \Omega$$

Man erkennt an dem Beispiel, daß sich durch eine solche Umformung die gestellte Aufgabe leicht lösen läßt, und daß trotz der starken Unsymmetrie der Brücke und des vergleichsweise niedrigen Galvanometerwiderstandes sich der Gesamtwiderstand der Brücke nur geringfügig ändert.

In gleicher Weise wertvoll sind die Formeln bei der Lösung von Bandfilterrechnungen (Bild 6 und 7).

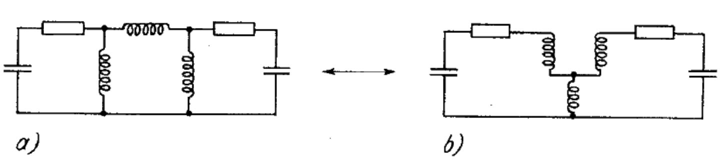


Bild 6. Induktive Kopplung; a = Dreieck, b = Stern

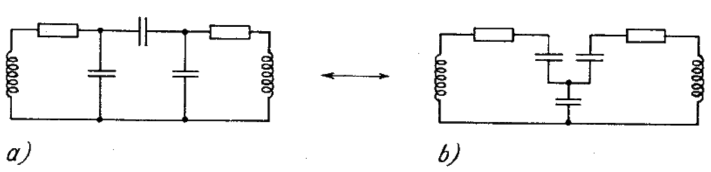


Bild 7. Kapazitive Kopplung; a = Dreieck, b = Stern

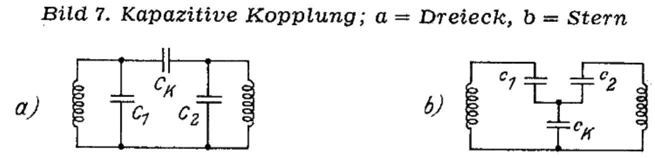


Bild 8. Umrechnung eines kapazitiv gekoppelten Bandfilters

f) Formeln für die Umrechnung kapazitiv gekoppelter Bandfilter

Die kapazitive Kopplung von Bandfiltern kann entweder nach Bild 8a erfolgen (wobei ein sehr kleiner Serienkondensator C_K die Spannung von einem Kreis auf den anderen überträgt), oder nach Bild 8b, wobei die Energieübertragung auf den zweiten Kreis durch den Spannungsabfall hervorgerufen wird, den der Strom des Primärkreises am kapazitiven Widerstand von c_K entstehen läßt (Fußkopplung). Der Kopplungskondensator c_K ist hierbei im Gegensatz zur Schaltung 8a sehr groß. Gelegentlich ist es für den Funktechniker notwendig, die eine Schaltung mit vorgegebenen Werten in die andere umzurechnen und die C-Werte zu ermitteln, die in der neuen Schaltung die gleichen Bandfiltereigenschaften ergeben.

Die notwendigen Formeln für solche Umrechnungen können mit Hilfe der Stern-Dreieck-Transformation abgeleitet werden, da, wie man aus den Bildern ersieht, die kapazitiven Blindwiderstände einmal in Dreieckschaltung (8a) und einmal in Sternschaltung (8b) angeordnet sind.

Beispiel für solche Umrechnung:

Wie groß ist der Kopplungskondensator c_K bei Fußkopplung (8b)? Die Werte C_1, C_2, C_K für Serienkopplung (8a) sind gegeben.

Rechnungsgang:

Nach der Stern-Dreieck-Transformation ist:

$$X_{cK} = \frac{X_{C1} \cdot X_{C2}}{X_{C1} + X_{C2} + X_{CK}}$$

$$\frac{1}{\omega_{cK}} = \frac{\frac{1}{C_1} \cdot \frac{1}{\omega C_2}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_K}}$$

Multiplikation mit ω und Inversion ergibt:

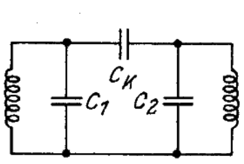
$$c_K = C_1 \cdot C_2 \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_K}\right) = C_2 + C_1 + \frac{C_1\,C_2}{C_K}.$$

Da es sich zumeist um symmetrische Bandfilter handeln wird, setzten wir noch $C_1 = C_2$ und erhalten für diesen speziellen Fall:

$$\boxed{c_K = \frac{C^2}{C_K} + 2\,C}$$

Auf analoge Weise geschieht die Ableitung der übrigen Umrechnungsformeln, die nachfolgend zusammengestellt sind.

Tabelle der Umrechnungsformeln

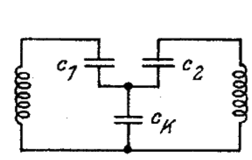


1) allgemein

a) $\boxed{c_K = \frac{C_1\,C_2}{C_K} + C_1 + C_2}$

b) $\boxed{c_1 = \frac{C_1\,C_K}{C_2} + C_1 + C_K}$

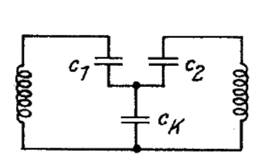
c) $\boxed{c_2 = \frac{C_2\,C_K}{C_1} + C_2 + C_K}$



2) für $C_1 = C_2$

a) $\boxed{c_K = \frac{C^2}{C_K} + 2C}$

$\boxed{c_1 = c_2 = C + 2C_K}$

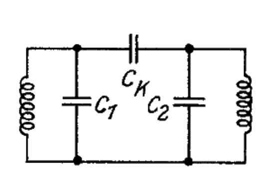


3) allgemein

a) $\boxed{C_K = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2 + c_K}}$

b) $\boxed{C_1 = \frac{c_1 \cdot c_K}{c_1 + c_2 + c_K}}$

c) $\boxed{C_2 = \frac{c_2 \cdot c_K}{c_1 + c_2 + c_K}}$



4) für $c_1 = c_2$

c) $\boxed{C_K = \frac{c^2}{2c + c_K}}$

b) $\boxed{C_1 = C_2 = \frac{c \cdot c_K}{2c + c_K}}$

oder

c) $\boxed{C_1 = C_2 = \frac{1}{\frac{2}{c_K} + \frac{1}{c}}}$

Zahlenbeispiel: Ein Bandfilter nach Bild 8a hat die Kapazitätswerte $C_1 = C_2 = 200$ pF und eine Kopplungskapazität C_K von 3 pF. Es soll ein Bandfilter mit Fußkopplung gebaut werden, das die gleiche Bandfilterwirkung hat. Wie groß müßte $c_1 = c_2$ und c_k werden?

Es ist nach Formel 2a $c_K = \frac{200^2}{3} + (2 \cdot 200) =$ ca. 13 700 pF und nach Formel 2b $c_1 = c_2 = 200 + (2 \cdot 3) = 206$ pF. Mit der Gegenprobe nach den Gleichungen 4c und 4a kann die Richtigkeit der Rechnung geprüft werden.