

# Reaktanzfilter, Filterketten mit m-Halbgliedern

# Fi 72

2 Blätter

## 1 Ungenügende Konstanz der Amplituden- und Laufzeitcharakteristik bei Verwendung von Grundgliedern

Die in FiA Fi 71 besprochenen Filterglieder haben einen Amplitudengang über der Frequenz, wie er dort in Bild 13 gezeigt ist. In dem Bereich von 0..0,6 für  $\omega/\omega_g$  ändert sich bereits der Wellenwiderstand um das 1,25fache. Eine Anpassung des Belastungswiderstandes ist also nur über einen Teil des Durchlaßbereiches möglich. Der Übertragungsfaktor ( $U_2/U_1$ ) ist demnach auch nur in einem begrenzten Frequenzbereich konstant, d. h. in dem Teil, in dem sich der Wellenwiderstand nur geringfügig ändert.

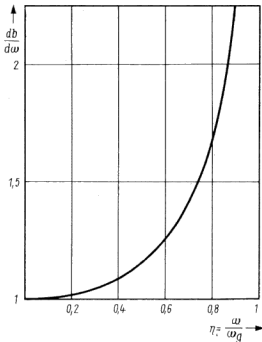
Ähnliches gilt auch für den Phasengang. Die Bilder 15 und 18 in FiA Fi 71 zeigen, daß die Phasencharakteristik im Durchlaßbereich nicht linear ist. Damit treten Phasenverzerrungen auf, denn die Bedingung, daß das Phasenmaß  $b$  linear über  $\omega$  ansteigen soll (FiA Vs 02, Abschnitt 2.4.3), wird nicht eingehalten. Wichtig ist also, daß die Ableitung  $db/d\omega$  konstant ist oder sich mindestens nur geringfügig ändert. Diese Ableitung bestimmt sich wie folgt: Nach FiA Fi 71, Abschnitt 3.3.4 gilt für das Phasenmaß im Durchlaßbereich:

$$\cos b = 1 - \frac{2 X_1}{X_q} = 1 - 2 \cdot \omega L \cdot \omega C = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_g^2}$$

Daraus bestimmt sich  $\frac{db}{d\omega}$  nach der Kettenregel (s. Mth 33,

Fall 6).

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\omega} &= \frac{db}{dx} \cdot \frac{dx}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\omega} \\ \frac{db}{dx} &= \frac{d(\arccos x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{dx}{d\eta} &= -4\eta \\ \frac{d\eta}{d\omega} &= \frac{1}{\omega_g} \end{aligned}$$



Links: Bild 1. Verlauf der Kurve  $db/d\omega$  über  $\omega/\omega_g$ . Sie stellt die Laufzeitänderung über der Frequenz dar

Rechts: Bild 3. Anpassung des m-Halbgliedes an den Wellenwiderstand des T-Gliedes

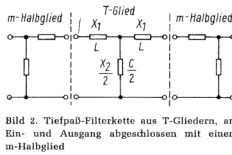


Bild 2. Tiefpaß-Filterkette aus T-Gliedern, am Ein- und Ausgang abgeschlossen mit einem m-Halbglied

$$\begin{aligned} \frac{db}{d\omega} &= \frac{4\eta}{\omega_g \cdot \sqrt{1-x^2}} = \frac{4\eta}{\omega_g \sqrt{1-(1-2\eta^2)^2}} \\ \frac{db}{d\omega} &= \frac{4\eta}{\omega_g \sqrt{4\eta^2 - 4\eta^4}} = \frac{2}{\omega_g} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \end{aligned} \quad (1)$$

Siehe hierzu Bild 1.

Die Betrachtung über den Amplitudengang und den Phasengang zeigt, daß der Durchlaßbereich dieser Filterglieder nur in einem kleinen Teil ausgenützt werden darf, d. h. die Filter müssen für eine Grenzfrequenz ausgelegt werden, die höher als die höchste zu übertragende Frequenz ist.

Es muß also danach gestrebt werden, den Frequenzbereich zu erweitern, in dem Anpassung möglich und/oder in dem  $\frac{db}{d\omega}$  weitgehend konstant ist. Diese Aufgabe ist mit m-Gliedern weitgehend erfüllbar.

## 2 Verbesserung der Amplitudencharakteristik

### 2.1 Tiefpaß-m-Glied

#### 2.1.1 Filterkette aus T-Gliedern

Für den Aufbau der m-Glieder gelten folgende Bedingungen: Der Wellenwiderstand des m-Gliedes in T-Schaltung  $Z_{mT}$  soll gleich dem des Grundgliedes  $Z_T$  sein (Bild 2).

Im Längsweig des m-Gliedes sollen gleichartige Reaktanzen wie bei den Grundgliedern verwendet werden, d. h.

im Tiefpaß-Glied Induktivitäten  
im Hochpaß-Glied Kapazitäten

Dementsprechend gilt nach Bild 3:

$$X_1' = m \cdot X_1$$

und:

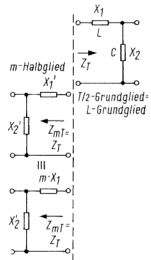
$$Z_T = \sqrt{Z_{leer} \cdot Z_k} = \sqrt{(X_1 + X_2) \cdot X_1} = \sqrt{X_1^2 + X_1 \cdot X_2}$$

$$Z_{mT} = \sqrt{X_1'^2 + X_1' \cdot X_2'} = \sqrt{m^2 \cdot X_1^2 + m \cdot X_1 \cdot X_2'}$$

Ferner gilt:

$$X_1^2 + X_1 \cdot X_2 = m^2 \cdot X_1^2 + m \cdot X_1 \cdot X_2'$$

$$X_2' = \frac{X_1^2 + X_1 \cdot X_2 - m^2 X_1^2}{m \cdot X_1} = \frac{X_2}{m} + X_1 \cdot \frac{1 - m^2}{m}$$



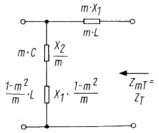


Bild 4. Dimensionierung des m-Halbgliedes unter der Bedingung  $Z_{mT} = Z_T$

Das ergibt ein L-Glied nach Bild 4, im Vergleich zu Bild 3a.

Eine Nachprüfung für  $Z_{mT}$  ergibt:

$$Z_{mT} = \sqrt{j^2 \cdot m^2 \cdot X_1^2 + j \cdot m \cdot X_1 \cdot \left[ \frac{-j \cdot X_q}{m} + jX_1 \cdot \frac{1-m^2}{m} \right]}$$

$$Z_{mT} = \sqrt{X_1 \cdot X_q - X_1^2} = \sqrt{\frac{L}{C} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \right]} = Z_T$$

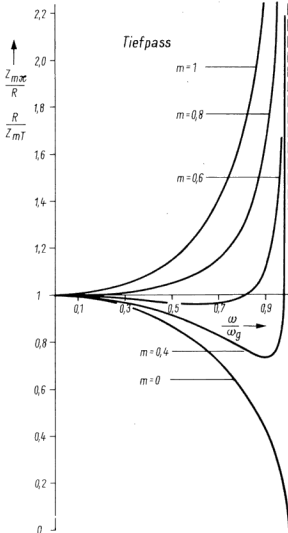
wie es eingangs vorausgesetzt wurde.

Natürlich muß  $Z_{m\pi}$  vom  $Z_\pi$ -Wert des Grundgliedes abweichen. Für  $Z_{m\pi}$  erhalten wir:

$$Z_{m\pi} = \sqrt{Z_{leer} \cdot Z_k} = \sqrt{X_g' \cdot \frac{X_g' \cdot X_1'}{X_1' + X_g'}}$$

$$Z_{m\pi} = \sqrt{\left( -j \frac{1}{m \cdot \omega C} + j\omega L \frac{1-m^2}{m} \right)}$$

$$\sqrt{\frac{j\omega L \cdot m \cdot \left[ -j \frac{1}{m\omega C} + j\omega L \frac{1-m^2}{m} \right]}{j\omega L \cdot m + j\omega L \cdot \frac{1-m^2}{m} - j \frac{1}{m\omega C}}}$$



Rechts: Bild 6. Tiefpaß-Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern, am Ein- und Ausgang abgeschlossen mit einem m-Halbglied

Links: Bild 5. Verlauf von  $\frac{Z_{m\pi}}{R}$  und  $\frac{R}{Z_{mT}}$  über  $\frac{\omega}{\omega_g}$  für verschiedene Werte von m

Rechts: Bild 7. Dimensionierung des m-Halbgliedes, unter der Bedingung  $Z_{m\pi} = Z_\pi$

$$Z_{m\pi} = \sqrt{\left[ -\frac{1}{\omega C} + \omega L (1-m^2) \right]} \cdot \sqrt{\frac{\left[ \frac{L}{C} - \omega^2 L^2 (1-m^2) \right] \cdot (-\omega C)}{1 - \omega^2 LC}}$$

$$Z_{m\pi} = \sqrt{\frac{L}{C} \cdot \frac{[1 - \omega^2 CL (1-m^2)] \cdot [1 - \omega^2 CL (1-m^2)]}{1 - \omega^2 LC}}$$

$$Z_{m\pi} = R \cdot \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \cdot (1-m^2)}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2}}} = Z_\pi \cdot \left[ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \cdot (1-m^2) \right]$$

Den Verlauf von  $Z_{m\pi}$  über  $\frac{\omega}{\omega_g}$  zeigt Bild 5. Man sieht, daß für  $m = 0,6$  der Wellenwiderstand in einem wesentlich größeren Bereich als bei den Grundgliedern konstant bleibt.

2.1.2 Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern

Wird eine Filterkette nach Bild 6 aufgebaut, dann gilt für das m-Glied die korrespondierende Bedingung:

Der Wellenwiderstand des m-Gliedes in  $\pi$ -Schaltung  $Z_{m\pi}$  soll gleich dem des Grundgliedes  $Z_\pi$  sein.

Im Querzweig soll die gleichartige Reaktanz wie bei den Grundgliedern verwendet werden, d. h.

$$X_g' = \frac{X_g}{m}$$

Dementsprechend gilt:

$$Z_{m\pi} = \sqrt{Z_{leer} \cdot Z_k} = \sqrt{X_2 \cdot \frac{X_1 \cdot X_2}{X_1 + X_2}}$$

$$Z_{m\pi} = \sqrt{\frac{X_2}{m} \cdot \frac{X_1' \cdot \frac{X_2}{m}}{X_1' + \frac{X_2}{m}}}$$

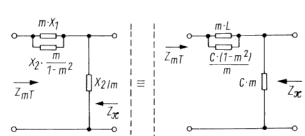
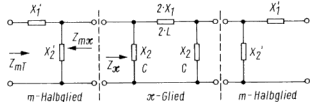
Ferner gilt:

$$\frac{X_1 \cdot X_g'^2}{X_1 + X_g'} = \frac{X_1' \cdot \frac{X_g'^2}{m^2}}{X_1' + \frac{X_g'}{m}}$$

$$X_1 (m^2 X_1' + m X_g) = X_1' (X_1 + X_g)$$

$$X_1' = \frac{m \cdot X_1 \cdot X_g}{X_1 + X_g - m^2 X_1}$$

Das ergibt ein L-Glied nach Bild 7.



(Blatt 2 erscheint in einem der nächsten Hefte)

2.1.2 Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern (Fortsetzung)

In diesem Fall muß natürlich  $Z_{mT}$  vom Wellenwiderstands-wert  $Z_T$  des Grundgliedes abweichen. Für  $Z_{mT}$  gilt:

$$Z_{mT} = R \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} \cdot (1 - m^2)$$

$$Z_\pi = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

Den Verlauf von  $Z_{mT}$  über  $\frac{\omega}{\omega_g}$  zeigt Bild 5. Auch hier ist für  $m = 0,6$  der Wellenwiderstand in einem weiten Bereich von der Frequenz unabhängig.

2.1.3 Zusammenstellung für Tiefpaß-m-Glieder

Filterkette aus T-Gliedern

$$Z_{mT} = Z_T$$

$$Z_{m\pi} \neq Z_\pi$$

$$X_1 = j\omega L \quad X_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$X_1' = m \cdot j\omega L \quad X_2' = \frac{1}{m \cdot j\omega C} + \frac{j\omega L (1 - m^2)}{m}$$

$$Z_{m\pi} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 (1 - m^2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \quad Z_T = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

$$Z_{m\pi} = Z_\pi \cdot \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 (1 - m^2)\right]$$

Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern:

$$Z_{m\pi} = Z_\pi$$

$$Z_{mT} \neq Z_T$$

$$X_1 = j\omega L \quad X_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

$$X_1' = m \cdot j\omega L \quad X_2' = \frac{1}{(1 - m^2) j\omega C} \quad X_2'' = \frac{1}{m \cdot j\omega C}$$

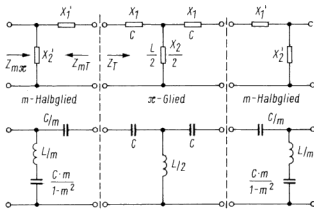


Bild 8. Hochpaß-Filterkette aus T-Gliedern, am Ein- und Ausgang abgeschlossen mit einem m-Halbglied

$$Z_{mT} = R \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} (1 - m^2); \quad Z_\pi = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

$$Z_{mT} = \frac{Z_T}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 (1 - m^2)}$$

2.2 Hochpaß-m-Glieder

2.2.1 Filterkette aus T-Gliedern

In diesem Fall gilt (Bild 8):

$$Z_{mT} = Z_T$$

$$Z_{m\pi} \neq Z_\pi$$

$$X_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad X_2 = j\omega L$$

$$X_1' = \frac{m}{j\omega C} \quad X_2' = \frac{(1 - m^2)}{j\omega C} + \frac{j\omega L}{m}$$

$$Z_{m\pi} = R \cdot \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 (1 - m^2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}} \quad Z_T = R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}$$

$$Z_{m\pi} = Z_\pi \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2 (1 - m^2)\right] \quad \text{(Bild 9)}$$

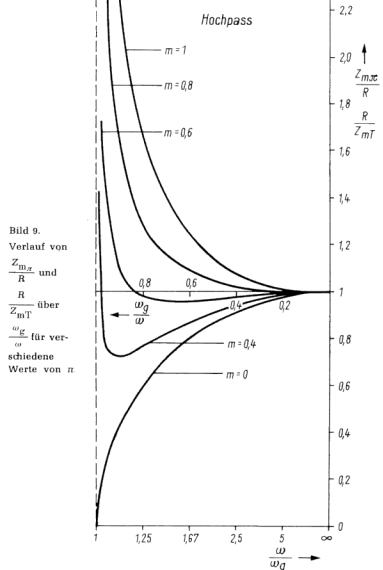


Bild 9. Verlauf von  $\frac{Z_{m,\pi}}{R}$  und  $\frac{R}{Z_{mT}}$  über  $\frac{\omega}{\omega_g}$  für verschiedene Werte von  $\pi$

2.2.2 Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern

Es gilt nach Bild 10:

$$Z_{m\alpha} = Z_{\pi}$$

$$Z_{mT} + Z_T$$

$$X_1 = \frac{1}{j\omega C} \quad X_2 = j\omega L$$

$$X_1' = \frac{m}{j\omega C} \parallel \frac{m \cdot j\omega L}{1 - m^2} \quad X_2' = m \cdot j\omega L$$

$$Z_{mT} = R \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega}\right)^2}}{1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega}\right)^2} \cdot (1 - m^2); \quad Z_{\pi} = R \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_E}{\omega}\right)^2}}$$

$$Z_{mT} = \frac{Z_T}{1 \cdot \left(\frac{\omega_E}{\omega}\right)^2 (1 - m^2)}$$

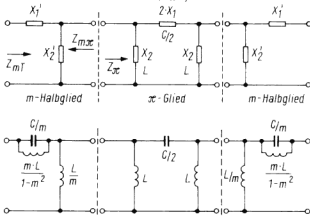


Bild 10. Hochpaß-Filterkette aus  $\pi$ -Gliedern, am Ein- und Ausgang abgeschlossen mit einem m-Halbglied

2.3 Dimensionierung der Kettenglieder

(Zusammenstellung aus den Abschnitten 2.1 und 2.2)

Tiefpaß-m-Glied

m-Halbglied mit Serieninduktivität im Querzweig (Bild 4):

Längs-induktivität	Serien-Quer-induktivität	Serien-Quer-kapazität
$L_1 = m \cdot L$	$L_2 = \frac{1 - m^2}{m} \cdot L$	$C_2 = m \cdot C$

m-Halbglied mit Parallelkapazität im Längszweig (Bild 7):

Parallel-Längs-induktivität	Parallel-Längs-kapazität	Quer-kapazität
$L_1 = m \cdot L$	$C_1 = \frac{1 - m^2}{m} \cdot C$	$C_2 = m \cdot C$

Hochpaß-m-Glied

m-Halbglied mit Serienkapazität im Querzweig (Bild 8):

Längs-kapazität	Serien-Quer-kapazität	Serien-Quer-induktivität
$C_1 = \frac{C}{m}$	$C_2 = \frac{m \cdot C}{1 - m^2}$	$L_2 = \frac{L}{m}$

m-Halbglied mit Parallelinduktivität im Längszweig (Bild 10):

Parallel-Längs-kapazität	Parallel-Längs-induktivität	Quer-induktivität
$C_1 = \frac{C}{m}$	$L_1 = \frac{m \cdot L}{1 - m^2}$	$L_2 = \frac{L}{m}$

Die  $L_1$  und  $C$ -Werte bestimmen sich aus dem Grundglied (FTA Fi 71, Abschnitt 3.1) und der Formel für die Grenz-Kreisfrequenz:

$$\omega_E = \frac{1}{\sqrt{C \cdot L}}$$

Anhang zu Abschnitt 3.3.4 von Fi 71

Für das Wellenübertragungsmaß  $g$  gilt die Definitions-gleichung (Bild 19):

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$$

Ferner gilt für den symmetrischen Vierpol, der mit dem komplexen Widerstand  $Z_a$  abgeschlossen ist:

$$\frac{U_1}{U_2} = \cosh g + \frac{Z_r}{Z_a} \sinh g \quad Z_r = \text{Wellenwiderstand des symmetrischen Vierpols}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \cosh g + \frac{Z_a}{Z_r} \sinh g$$

Daraus folgt mit  $Z_a = \frac{U_2}{I_2}$ :

$$Z_{\text{eing}} = \frac{U_1}{I_1} = Z_a \cdot \frac{\cosh g + \frac{Z_r}{Z_a} \sinh g}{\cosh g + \frac{Z_a}{Z_r} \sinh g}$$

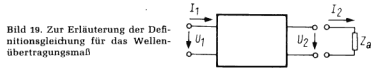


Bild 19. Zur Erläuterung der Definitions-gleichung für das Wellenübertragungsmaß

Im Fall des Leerlaufs ( $Z_a = \infty$ ) erhält man:

$$Z_{\text{leer}} = Z_{\text{oc}} = Z_r \cdot \coth g$$

und im Fall des Kurzschlusses ( $Z_a = 0$ ):

$$Z_k = Z_0 = Z_r \cdot \tanh g \tag{10}$$

und weiter:

$$Z_r = \sqrt{Z_k \cdot Z_{\text{leer}}} \tag{11}$$

$$g = \text{artanh} \sqrt{\frac{Z_k}{Z_{\text{leer}}}}$$

Nun ist (nach FtA Mth 21/1a):

$$\tanh^2 g = \frac{\sinh^2 g}{\cosh^2 g} = \frac{\cosh^2 g - 1}{\cosh^2 g} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 g}$$

Ferner ist nach Gleichung 10 und 11:

$$\tanh^2 g = \frac{Z_k}{Z_{\text{leer}}}$$

also  $1 - \frac{1}{\cosh^2 g} = \frac{Z_k}{Z_{\text{leer}}}$

oder  $\cosh^2 g = \frac{Z_{\text{leer}}}{Z_{\text{leer}} - Z_k}$

und  $\sinh^2 g = \cosh^2 g - 1 = \frac{Z_k}{Z_{\text{leer}} - Z_k}$

Literatur

- Mejerowitsch, L. A., und Selitschenko, L. G.: Impulstechnik. Berliner Union Stuttgart 1960.
- Telefunken-Laborbuch, Band IV. Franzis-Verlag, München.
- Wollot, Dr. Julius: Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik. Verlag Julius Springer, Berlin.
- Termon, F. E.: Radio Engineers Handbook. McGraw-Hill Book Co., New York.
- Heckmann, Dipl.-Ing. H.: Grundlagen zur Theorie und Berechnung von Kettenleitern, Filtern und Verzögerungsketten. Radio und Fernsehen, November 1965, Seite 696.