Aus Funkschau 6-8-10/1962. Digitalisiert 12/2014 von Eike Grund für http://www.radiomuseum.org
mit freundlicher Genehmigung der Funkschau-Redaktion. Die aktuellen Ausgaben der FUNKSCHAU finden Sie unter http://www.funkschau.de (Im Original 2-spaltig)

Funktechnische Arbeitsblätter

Darstellung periodischer Funktionen durch Fouriersche Reihen

DK 517.5
Mth 31
2. Ausgabe
4 Blätter

A. Numerische Methode für empirisch gefundene Kurven

1. Allgemeines

Gegeben ist ein periodischer Kurvenverlauf. Die Periode ist 2π. Eine Periode wird in 2n Teile zerlegt, so daß ein Teil die Breite

$$\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}, d.h. \frac{180^0}{n}$$ im Winkelmaß hat. **(Bild 1)**

Bekannt sind also die Ordinaten oder Amplituden an den einzelnen Stellen x_o, x_1, x_2, ...

Verlangt ist: eine Funktion zu bestimmen, deren Kurvenverlauf sich der gegebenen Kurve möglichst weit annähert.

Die Funktion soll von der allgemeinen Form sein:

$$f(x) = a_0 + a_l \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \dots \quad (1)$$
$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x \dots$$

oder abgekürzt

$$f(x) = a_0 + \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda \cos \lambda x + \sum_{\lambda=1}^{n} b_\lambda \sin \lambda x \qquad (1a)$$

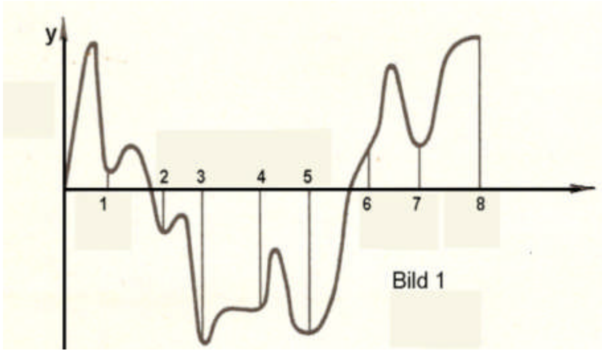


Bild 1

Die Aufgabe besteht also darin, die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, ... b_1, b_2, b_3, ... zu bestimmen. Setzt man diese Koeffizienten in die Gleichung (1) ein, so soll der Kurvenverlauf der so gebildeten Funktion dem gegebenen Kurvenzug **(Bild 2)** möglichst getreu entsprechen.

Dieses Verfahren dient z. B. in der Tonfrequenztechnik und Elektroakustik dazu, um aus Oszillogrammen auf den Gehalt an Grundwelle und Oberwellen zu schließen und Klirrfaktoren zu ermitteln.

2. Die Koeffizientenbestimmung

Zahl der Teile, in die der Kurvenzug zerlegt wird

An sich kann für n eine beliebige Zahl gesetzt werden; normalerweise verwendet man aber zur Rechnungsvereinfachung dafür eine durch 2 teilbare Zahl, meistens n = 4 oder 6, also 2n = 8 oder 12.

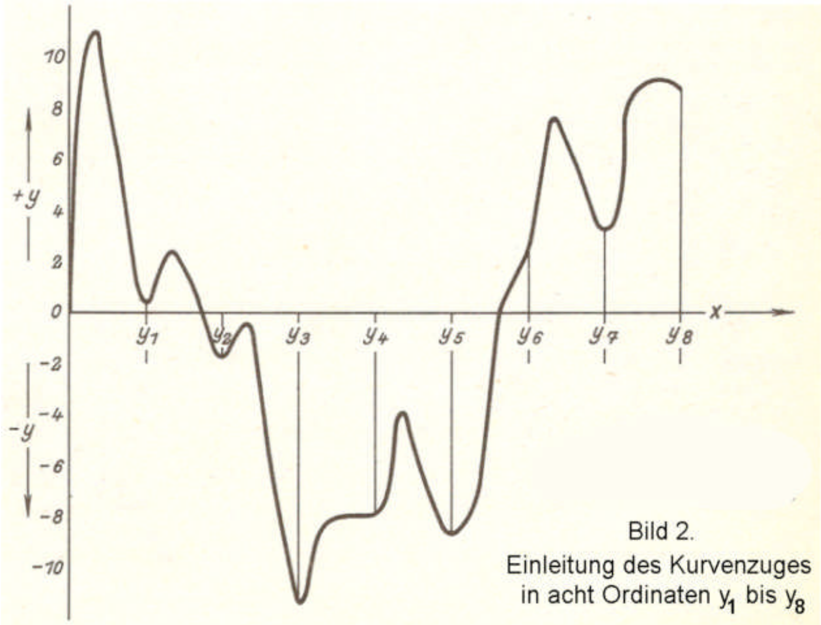


Bild 2.
Einleitung des Kurvenzuges in acht Ordinaten y_1 bis y_8

Bei einer Teilung in acht Abschnitte liegen dann die Meßpunkte, bezogen auf die Grundwelle, bei 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360° und bei einer 12er-Teilung bei 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360°. Es werden - mit

Rücksicht auf die praktische Bedeutung - nur diese zwei Einteilungen hier ausführlich behandelt. Zum Schluß werden die allgemeinen Formeln für eine beliebige Unterteilung angegeben (Abschnitt A 6).

3. Bestimmung der Koeffizienten bei Teilung in acht Abschnitte

Aus der Kurve oder Tabelle werden die acht Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 und y_8 entnommen. Aus diesen bildet man folgende Summen und Differenzen:

Gegebene Ordinaten	— y_8	y_1 y_7	y_2 y_6	y_3 y_5	y_4 —
	$y_8 = s_0$	$y_1+y_7 = s_1$	$y_2+y_6 = s_2$	$y_3+y_5 = s_3$	$y_4 = s_4$
	—	$y_1 - y_7 = d_1$	$y_2 - y_6 = d_2$	$y_3 - y_5 = d_3$	—

Daraus bildet man erneut folgende Summen und Differenzen

Errechnete Summen s	s_0 s_4	s_1 s_3	s_2 —
Summe	$s_0+s_4 = \sigma_0$	$s_1+s_3 = \sigma_1$	$s_2 = \sigma_2$
Differenz	$s_0 - s_4 = \delta_0$	$s_1 - s_3 = \delta_1$	—

Errechnete Differenzen d	d_1 d_3	d_2
Summe	$d_1 + d_3 = \sigma_1$	$d_2 = \sigma_2$
Differenz	$d_1 - d_3 = \delta_1$	—

Aus diesen Summen (σ, σ') und Differenzen (δ, δ') berechnen sich die Koeffizienten nach folgenden Formeln:

$$8a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 \qquad 8a_4 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2$$

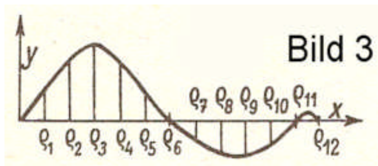
$$4a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 \qquad 4b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma'_1 + \sigma'_2$$

$$4a_2 = \sigma_0 - \sigma_2 \qquad 4b_2 = \delta'_1$$

$$4a_3 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 \qquad 4b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma'_1 - \sigma'_2$$

Mit diesen so errechneten Werten wird die Funktion f (x) gebildet:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + a_4 \cos 4x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$$



4. Bestimmung der Koeffizienten bei Teilung in zwölf Abschnitte

Wie in Abschnitt 3 werden aus den zwölf Ordinaten y_1 ... y_{12} folgende Summen und Differenzen gebildet:

Gegebene Ordinaten	— y_{12}	y_1 y_1	y_2 y_{10}	y_3 y_9	y_4 y_8	y_5 y_7	y_6 —
Summe	$y_{12} = s_0$	$y_1 + y_{11} = s_1$	$y_2 + y_{10} = s_2$	$y_3 + y_9 = s_3$	$y_4 + y_8 = s_4$	$y_5 + y_7 = s_5$	$y_6 = s_6$
Differenz	—	$y_1 - y_{11} = d_1$	$y_2 - y_{10} = d_2$	$y_3 - y_9 = d_3$	$y_4 - y_8 = d_4$	$y_5 - y_7 = d_5$	—

Zweite Summen- und Differenzbildung:

Errechnete Summen s	s_0 s_6	s_1 s_5	s_2 s_4	s_3
Summe	$s_0 + s_6 = \sigma_0$	$s_1 + s_5 = \sigma_1$	$s_2 + s_4 = \sigma_2$	$s_3 = \sigma_3$
Differenz	$s_0 - s_6 = \delta_0$	$s_1 - s_5 = \delta_1$	$s_2 - s_4 = \delta_2$	—

Errechnete Differenzen d	d_1 d_5	d_2 d_4	d_3
Summe	$d_1 + d_5 = \sigma'_1$	$d_2 + d_4 = \sigma'_2$	$d_3 + = \sigma'_3$
Differenz	$d_1 - d_5 = \delta'_1$	$d_2 - d_4 = \delta'_2$	—

Aus diesen Summen (σ, σ') und Differenzen (δ, δ') berechnen sich die Koeffizienten nach folgenden Gleichungen:

$$12a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$
$$6a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta_1 + \frac{1}{2} * \delta_2$$
$$6a_2 = \sigma_0 + \frac{1}{2} * \sigma_1 - \frac{1}{2} * \sigma_2 - \sigma_3$$
$$6a_3 = \delta_0 - \delta_2$$
$$6a_4 = \sigma_0 - \frac{1}{2} * \sigma_1 - \frac{1}{2} * \sigma_2 + \sigma_3$$
$$6a_5 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta_1 + \frac{1}{2} * \delta_2$$

$$12a_6 = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3$$
$$6b_1 = \sigma'_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \sigma'_2 + \frac{1}{2}\sigma'_3$$
$$6b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_2$$
$$6b_3 = \frac{1}{2}\sigma'_1 - \frac{1}{2}\sigma'_3$$
$$6b_4 = \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \delta'_2$$
$$6b_5 = \sigma'_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} * \sigma'_2 + \frac{1}{2} * \sigma'_3$$

Mit diesen Koeffizienten wird die Funktion f (x) gebildet:

f (x) = a_0 + a_1 cos x + a_2 cos 2 x +a_3 cos 3 x + a_4 cos 4 x + a_5 cos 5 x + a_6 cos 6 x + b_1 sin x + b_2 sin 2 x + b_3 sin 3 x + b_4 sin 4 x + b_5 sin 5 x

5. Zahlenbeispiel

Gegebene Ordinaten:

y_1 = 0,38 y_5 = – 8,58
y_2 = – 1,70 y_6 = 2,42
y_3 = – 11,41 y_7 = 3,21
y_4 = – 8,04 y_8 = 8,76

Gegebene Ordinaten	— y_8 8,76	y_1 0,38 y_7 3,21	y_2 –1,70 y_6 2,42	y_3 –11,41 y_5 –8,58	y_4 –8,04
Summe	s_0 8,76	s_1 3,59	s_2 0,72	s_3 –19,99	s_4 –8,04
Differenz	—	d_1 –2,83	d_2 –4,12	d_3 –2,83	—

Errechnete Summen s	s_0 8,76 s_4 –8,04	s_1 3,59 s_8 –19,99	s_2 0,72		Errechnete Differenzen d	d_1 –2,83 d_3 –2,83	d_2 –4,12
Summe	σ_0 0,72	σ_1 –16,4	σ_2 0,72		Summe	σ'_1 –5,66	σ'_2 –4,12
Differenz	δ_0 16,80	δ_1 23,58	—		Differenz	δ'_1 0	—

Daraus berechnen sich die Koeffizienten:

$8a_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = 0{,}72 – 16{,}4 + 0{,}72 = –14{,}96$

$a_0 = - 1{,}87$

$$4a_1 = \delta_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 = 16{,}80 + 0{,}707 * 23{,}58 = 33{,}47$$

$a_1 = 8{,}37$

$4a_2 = \sigma_0 - \sigma_2 = 0{,}72 – 0{,}72 = 0$

$a_2 = 0$

$$4a_3 = \delta_0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} * \delta_1 = 16{,}80 - 0{,}707 * 23{,}58 = 0{,}13$$

$a_3 = 0{,}03$

$8a_4 = \sigma_0 – \sigma_1 + \sigma_2 = 0{,}72 + 16{,}40 + 0{,}72 = 17{,}84$

$a_4 = 2{,}23$

$$4b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma_1' + \sigma_2' = 0{,}707 * (-5{,}66) - 4{,}12 = -8{,}12$$

$b_1 = -2{,}03$

$4b_2 = \delta_1' = 0$

$b_2 = 0$

$$4b_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} * \sigma_1' - \sigma_2' = 0{,}707 * (-5{,}66) + 4{,}12 = 0{,}12$$

$b_3 = 0{,}03$

Damit lautet die Funktion f (x):

f (x) = – 1,87 + 8,37 cos x + 0,03 cos 3 x + 2,23 cos 4 x – 2,03 sin x + 0,03 sin 3 x

6. Allgemeine Formeln für die Koeffizienten

a) Der Koeffizient a_0

$$a_0 = \frac{1}{2n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho$$

Mit ρ sind die einzelnen Teilpunkte auf der x-Achse bezeichnet. 2n ist die Anzahl aller Teilpunkte (in B i 1 d 3 also 2n = 12). y_ρ sind die Amplituden an den einzelnen Teilpunkten ρ.

b) Die Koeffizienten a_μ (aber nicht für $\mu = n$), also a_1, a_2, a_3 ...

$$a_\mu = \frac{1}{n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho * \cos \mu x_\rho$$

Die Bedeutung von n, 2n und y_ρ siehe unter a), für cos μ x_ρ ist einzusetzen:

und zwar bei Berechnung von a_1 a_2 a_3

cos 1 • x_ρ cos 2 • x_ρ cos 3 • x_ρ

Dabei läuft ρ von 1 ... 12 (nach obigem Beispiel), jedoch sind die einzelnen Abszissenwerte in dem zugehörigen Winkel einzusetzen.

$$\left(x_\rho = 180^0 * \frac{\rho}{n} \right)$$

Beispiel: 12er Teilung

$x_1 = 30^0$, $x_2 = 60^0$, $x_3 = 90^0$ ...

Wir erhalten also für cos μ, x_ρ, und zwar bei Berechnung des Koeffizienten a_2 und einer 12er Teilung folgende Werte:

cos 2 • 30°, cos 2 • 60°, cos 2 • 90°, cos 2 • 120° ...

c) Der Koeffizient a_n

Die Bedeutung von n, 2n, ρ und y_ρ siehe unter a).

$$a_n = \frac{1}{2n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho (-1)^\rho$$

d) Die Koeffizienten b_n

$$b_n = \frac{1}{n} * \sum_{\rho=1}^{2n} y_\rho * \sin \mu x_\rho$$

Die Bedeutung von n, 2 n, y_ρ siehe unter a). Die Glieder sin μ x_ρ werden genau wie die Glieder cos μ x_ρ berechnet. Bei Berechnung des Koeffizienten b_1 und einer Teilung in acht Abschnitte erhalten wir folgende Werte für sin μx_ρ:

sin 1 • x_1 = sin 1 • 45^0 = ½ * $\sqrt{2}$

sin 1 • x_2 = sin 1 • 90^0 = 1

sin 1 • x_3 = sin 1 • 135^0 = ½ * $\sqrt{2}$

sin 1 • x_4 = sin 1 • 180^0 = 0

sin 1 • x_5 = sin 1 • 225^0 = – ½ * $\sqrt{2}$

sin 1 • x_6 = sin 1 • 270^0 = – 1

sin 1 • x_7 = sin 1 • 315^0 = – ½ * $\sqrt{2}$

sin 1 • x_8 = sin 1 • 360^0 = 0

B. Zerlegung gebräuchlicher Kurvenzüge

In vielen Fällen liegen nun in der Nachrichtentechnik aber auch Kurvenzüge vor, die sich noch relativ einfach analytisch darstellen lassen.

1. Beispiele:

Rechteckkurve
(tritt auf
beim Multivibrator)

Sägezahnkurve
(tritt auf
beim Kippgenerator)

Sinushalbwelle
(tritt auf
bei Einweggleichrichtung)

Umgeklappte Sinusschwingung
(tritt auf bei Zweiweggleichrichtung)

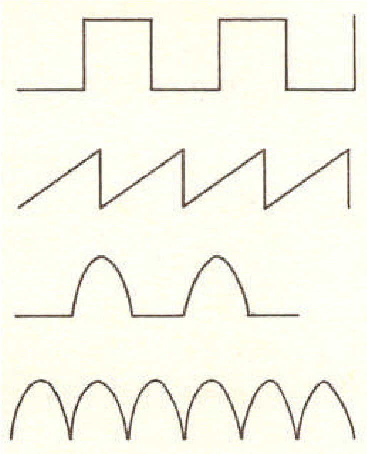


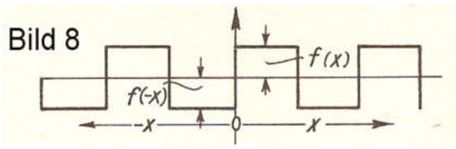
Bild 4 bis 7

Für diese und eine Reihe anderer ähnlicher Kurven braucht man die numerische Rechnung (Abschnitt A) nicht durchzuführen. Hier lassen sich aus vorliegenden Funktionen der Kurven die Koeffizienten der Fourierschen Reihe berechnen.

2. Regeln über die Koeffizienten

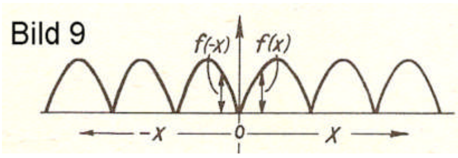
Generell kann man sich dazu folgendes merken: Ist die Funktion ungerade, das heißt ist f(–x)= – f(x),

Beispiel:



dann enthält die Reihe nur sin - Glieder. Ist die Funktion gerade, das heißt ist f (– x) = f (x),

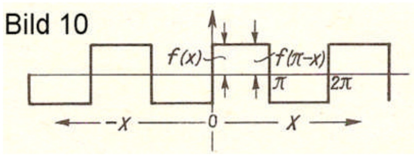
Beispiel:



dann enthält die Reihe keine sin - Glieder. Hat die Kurve eine weitere Symmetrielinie

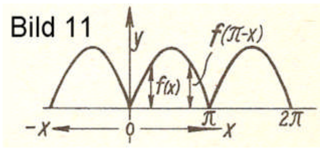
[z. B. f (x) = f (π – x)] ,

Beispiel:



fallen in der Fourier-Reihe, die nur aus sin-Gliedern besteht, alle die fort, deren Argument ein geradzahliges Vielfaches von x ist. Es bleiben also nur sin x, sin 3 x, sin 5 x usw.

Oder zum Beispiel:
Hier fallen in der Reihe, in der die sin-Glieder fehlen, alle die cos-Glieder weg, deren Argument ein ungeradzahliges Vielfaches von x ist. Es bleiben übrig nur: d_0, cos 2 x, cos 4 x cos 6 x ...



3. Grafisches Beispiel: Rechteckkurve

Addiert man an Hand der Reihe für eine Rechteckkurve die Grundwelle und die Oberwellen grafisch, sieht man ohne weiteres ein, daß die oben aufgezählten Gesetzmäßigkeiten über den Fortfall bestimmter Gliedergruppen ihre Berechtigung haben.

Formel für die Rechteckkurve (**Bild 12**):

$$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

a) Rechteckkurve

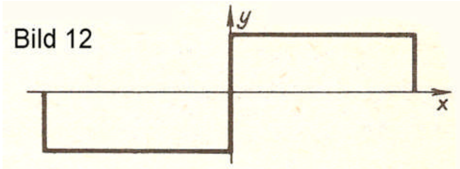


Bild 12

b) 1. Annäherung
sin x

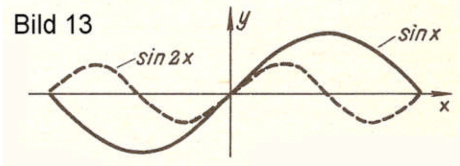


Bild 13

cos x muß wegfallen, da er für x = 0 den Wert 1 hat, während ja die Funktion für x = 0 durch Null gehen soll. sin 2 x (in b gestrichelt eingezeichnet) muß wegfallen, da jede der beiden Halbwellen durch Summation von sin x und sin 2 x sehr unsymmetrisch würde.

c) 2. Annäherung $\sin x + \frac{\sin 3x}{3}$

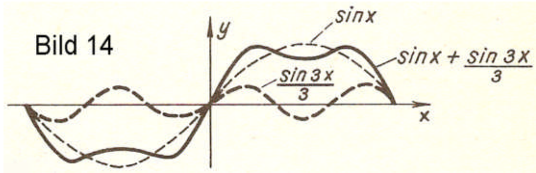


Bild 14

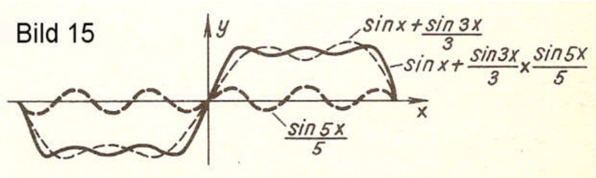


Bild 15

d) 3. Annäherung $\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right) + \frac{\sin 5x}{5}$

4. Berechnung der Fourier-Reihe

Ein periodischer Schwingungsvorgang läßt sich gewöhnlich durch eine Summe von harmonischen Schwingungen (Grundwelle, Oberwellen und Gleichstromglied [f = 0]) ersetzen. Das heißt, die periodische Funktion f (x) kann durch
$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$ ...dargestellt werden.
Es ist also notwendig, die Koeffizienten dieser Reihe: a_0, $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ zu bestimmen.

a) Euler-Fourier-Formeln zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\text{š}}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

n = 1, 2, 3, 4, ...

b) Darstellung der Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{inx}$$

Die Koeffizienten a_n können bestimmt werden durch:

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

c) Beispiel für die Berechnung nach 4a, d. h. mit den Euler-Fourierschen Formeln.

Gegeben sei eine umgeklappte Sinusschwingung (**Bild 16**)
Für den Bereich –π ... 0 ist f (x) = – sin x
Für den Bereich 0 ... π ist f (x) = + sin x

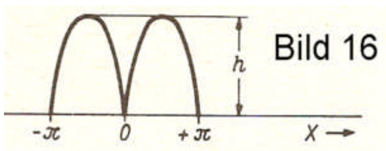


Bild 16

Dann berechnet sich a_0 nach B 4a in folgender Weise

$$a_0 = \frac{h}{2\text{š}}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{2\text{š}}\left\{\int_{-\pi}^{0} -\sin x\,dx + \int_0^{\pi} \sin x\,dx\right\}$$

$$= \frac{h}{2\text{š}}\left\{\left[\cos x\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\cos x\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{h}{2\text{š}}\left\{1-(-1)+1-(-1)\right\}$$

$$= \frac{2}{2\text{š}}\cdot h$$

Entsprechend ergibt sich nach B 4a:

$$a_n = \frac{h}{\check{s}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{h}{\check{s}} \left\{ \int_{-\pi}^{0} -\sin x \ \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \ \cos nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{h}{\check{s}} \left\{ \int_{0}^{-\pi} \sin x \ \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \ \cos nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{h}{\check{s}} \left\{ \int_0^{-\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(x - nx) dx + \frac{1}{2} \sin(x + nx) \right] dx + \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left[\sin(x - nx) dx + \frac{1}{2} \sin(x + nx) \right] dx \right\}$$

$$= \frac{h}{\check{s}} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{-\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{-\pi} + \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\}$$

Da cos (–π) = cos π, kann vereinfacht werden:

$$a_n = \frac{h}{2\check{s}} \left\{ 2 \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + 2 \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\}$$

$$a_n = \frac{h}{\check{s}} \left\{ \left[\frac{-\cos(1-n)x}{1-n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} \right]_0^{\pi} \right\}$$

Daraus berechnen sich die a-Koeffizienten wie folgt:

a_1 entfällt nach **Bild 11**

$$a_2 = -\frac{4}{3} \frac{h}{\pi}$$

a_3 entfällt nach **Bild 11**

$$a_4 = -\frac{4}{3 \cdot 5} \frac{h}{\pi}$$

Die b-Koeffizienten, d. h. die sin-Glieder, entfallen nach **Bild 9**. Deshalb lautet die Gleichung für f (x)

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} \ldots \right)$$

d) Beispiel für die Berechnung nach Abschnitt 4b, d.h. für die komplexe Schreibweise.

Gegeben seien nach **Bild 17** Halbwellenimpulse

Die Impulsfrequenz (Wiederholungsfrequenz) hat eine Periode von x = 2π, die die Impulsform selbst bestimmende Frequenz f_i hat eine kürzere Periode, und zwar gilt:

$$a * 2\pi k = \pi$$
$$a * 4\pi k = 2\pi \qquad a = 1/2k$$

a gibt also an, um wie viel die Periode von f_i kürzer ist als die der Wiederholungsfrequenz.

Für f(x) gilt also:

$$f(x) = h * \cos x/2k$$

Kontrolle: Für x = πk

$$f(x) = \cos \pi k/2k = \cos \pi/2 = 0$$

wie laut Zeichnung **Bild 17** gefordert ist.

Für die Fouriersche Reihe ergibt sich dann:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \cdot e^{inx} \quad \text{und für} \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} dx \qquad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi k}^{\pi k} h \cos \frac{x}{2k} \cdot e^{-inx} dx$$

Nach Mth 21/1a, Abschnitt C gilt: $\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$

Damit wird:

$$a_n = \frac{h}{4\pi}\int_{-\pi k}^{\pi k}\left(e^{ix\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + e^{-ix\left(\frac{1}{2k}+n\right)}\right)dx$$

$$= \frac{h}{4\pi}\left\{\left[\frac{e^{ix\left(\frac{1}{2k}-n\right)}}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)}\right]_{-\pi k}^{\pi k} + \left[\frac{e^{-ix\left(\frac{1}{2k}+n\right)}}{-i\left(\frac{1}{2k}+n\right)}\right]_{-\pi k}^{\pi k}\right\}$$

$$= \frac{h}{4\pi}\left\{\frac{e^{i\pi k\left(\frac{1}{2k}-n\right)} - e^{-i\pi k\left(\frac{1}{2k}-n\right)}}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + \frac{e^{-i\pi k\left(\frac{1}{2k}+n\right)} - e^{i\pi k\left(\frac{1}{2k}+n\right)}}{-i\left(\frac{1}{2k}+n\right)}\right\}$$

$$= \frac{h}{4\pi}\left\{\frac{2i\,\sin\pi\mathrm{k}\left(\frac{1}{2k}-n\right)}{i\left(\frac{1}{2k}-n\right)} + \frac{2i\,\sin\pi\mathrm{k}\left(\frac{1}{2k}+n\right)}{i\left(\frac{1}{2k}+n\right)}\right\}$$

$$= \frac{h}{2\pi}\left\{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi kn\right)}{\frac{1}{2k}-n} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi kn\right)}{\frac{1}{2k}+n}\right\}$$

$$a_n = \frac{h}{2\pi}\left(\frac{\cos\pi kn}{\frac{1}{2k}-n} + \frac{\cos\pi kn}{\frac{1}{2k}+n}\right)$$

Siehe Funktechnische Arbeitsblätter Mth 21/1

$$= \frac{h\cdot\cos\pi kn}{2\pi}\left(\frac{1}{\frac{k}{2}-n} + \frac{1}{\frac{k}{2}+n}\right)$$

$$a_n = \frac{h}{2\pi k}\cdot\frac{\cos\pi kn}{\frac{1}{4k_2}-n_2}$$

und $a_0 = \frac{h}{2\pi k}\cdot\frac{1}{\frac{1}{4k^2}} = \frac{2kh}{\pi}$

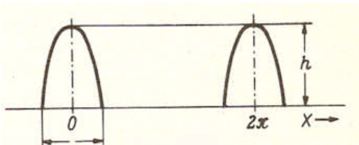


Bild 17

Die nebenstehende Gleichung (1) kann dann wie folgt geschrieben werden:

(1) (2)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{h}{2\pi k}\cdot\frac{\cos\pi kn}{\frac{1}{4k^2}-n^2}e^{inx} + \frac{2kh}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{2\pi k}\cdot\frac{\cos\pi kn}{\frac{1}{4k^2}-n^2}\cdot e^{inx}$$

d.h. die Summe von Gl. 1 wird in drei Summanden aufgelöst und zwar: a) n = – ∞ ... – 1; b) n = 0; c) n = + 1 ...+ ∞. Setzt man nun im ersten Summanden für n den Wert –n, dann erhält man für ihn Gleichung 3, wenn folgendes beachtet wird; läuft n von – ∞ bis – 1, dann geht –n von ∞ bis 1, oder, was das gleiche ist, von 1 bis ∞. Der erste Summand von (2) lautet dann:

(3)

$$\sum_{+1}^{\infty} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos(-n)\pi k}{\frac{1}{4k^2} - (-n)^2} e^{i(-n)x} = \sum_{+1}^{\infty} \frac{h}{2\pi k} \cdot \frac{\cos \pi kn}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \cdot e^{-inx} \quad (3)$$

Damit wird:

$$f(x) = \frac{2kh}{\pi} + \frac{h}{2\pi k} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \left(e^{inx} + e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{2kh}{\pi} + \frac{h}{2\pi k} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{\frac{1}{4k^2} - n^2} \cdot 2\cos nx$$

$$= \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\pi k}{1 - 4k^2 n^2} \cdot \cos nx$$

5. Graphische Darstellung von Grund- und Oberwellen

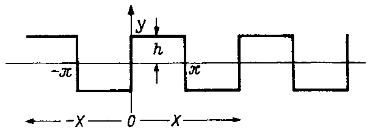
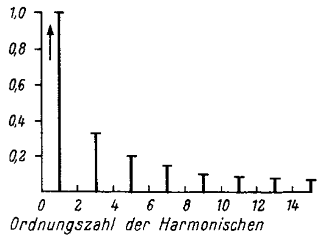
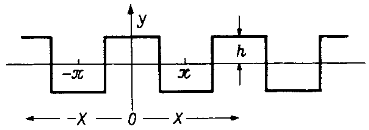
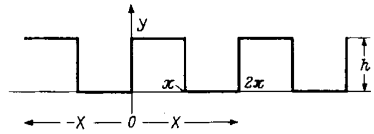
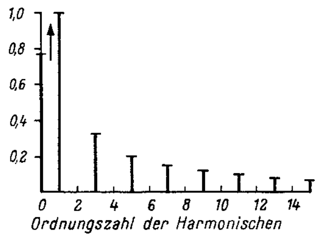
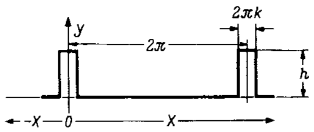
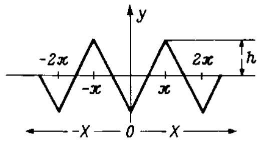
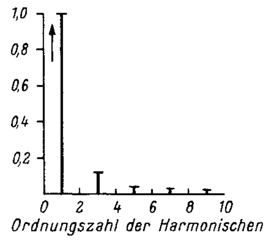
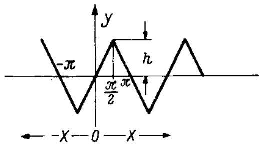
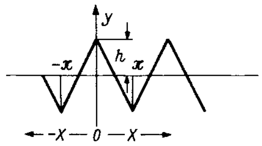
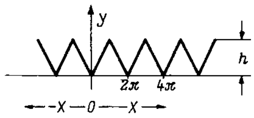
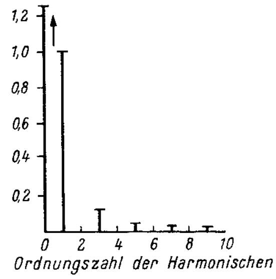
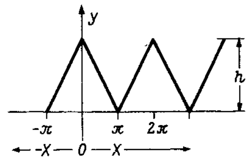
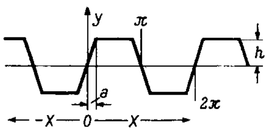
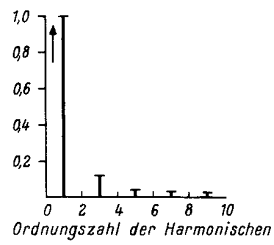
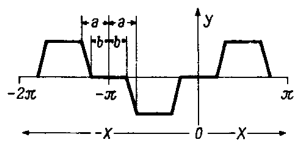
zwar ist das Auswerten der in Abschnitt C gegebenen Formeln nicht schwierig, aber manchmal zu zeitraubend. Außerdem genügt in vielen Fällen ein Überblick über den Verlauf der Amplitudenbegrenzungskurve, um beurteilen zu können, welche Oberwellen noch zu berücksichtigen sind bzw. von welcher Harmonischen ab die Oberwellenamplituden als uninteressant gelten können. Es ist deshalb in den rechten Spalten der auf Blatt 3a und 4 folgenden Formelzusammenstellung für die wichtigen Kurven über der Ordnungszahl der Harmonischen der zugehörige Amplitudenwert aufgetragen.

Bei den periodischen Funktionen zu den Kurven Nr. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14 erfolgt die Abnahme sehr rasch. Da die kleinen Amplitudenwerte in der graphischen Darstellung schwer ablesbar sind, bringt die folgende Tabelle (Blatt 4a) die errechneten Amplitudenwerte.

Tabelle der Amplitudenwerte für die Kurven 5 bis 14

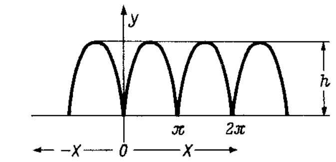
Ordnungszahl der Harmonischen	C_5, C_6, C_7	C_8, C_9	C_{10}	C_{12}, C_{13}	C_{14}
f_0	–	1,23	–	1,5	0,636
f_1	1	1	1	–	1
f_2	–	–	–	1	0,425
f_3	0,111	0,111	0,111	–	–
f_4	–	–	–	0,2	0,085
f_5	0.04	0,04	0,04	–	–
f_6	–	–	–	0,0855	0,0364
f_7	0,0204	0,0204	0,0204	–	–
f_8	–	–	–	0,0475	0,0202
f_9	0,0124	0,0124	0,0124	–	–
f_{10}	–	–	–		
f_{11}	0,00827	0,00827	0,00827	–	–
f_{12}	–	–	–	0,021	0,0089

C. Formelzusammenstellung

	Kurvenverlauf	Gleichung	Oberwellenaufbau
1		$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 9x}{9} \ldots\right)$	 Kurve 1 und 2
2		$f(x) = \frac{4h}{\pi}\left(\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 9x}{9} \ldots\right)$	
3		$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} \ldots\right)$	 Kurve 3
4		$f(x) = h\left\{k + \frac{2}{\pi}\left(\sin k\pi \cos x + \frac{1}{2}\sin 2k\pi \cdot \cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3k\pi \cos 3x \ldots\right)\right\}$	
5		$f(x) = -\frac{8h}{\pi^2}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\right)$	 Kurve 5, 6 und 7
6		$f(x) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} \ldots\right)$	
7		$f(x) = \frac{8h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\right)$	
8		$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\right)$	 Kurve 8 und 9
9		$f(x) = \frac{h}{2} + \frac{4h}{\pi^2}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \ldots\right)$	
10		$f(x) = \frac{4h}{a \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\sin a}{1^2} \cdot \sin x + \frac{\sin 3a}{3^2} \cdot \sin 3x + \frac{\sin 5a}{5^2} \cdot \sin 5x \ldots\right)$	 Kurve 10 bei $a = \pi/4$
11		$f(x) = \frac{4h}{\pi(a-b)}\left(\frac{\sin a - \sin b}{1^2} \sin x + \frac{\sin 3a - \sin 3b}{3^2} \sin 3x + \frac{\sin 5a - \sin 5b}{5^2} \sin 5x \ldots\right)$	

Kurvenverlauf | Gleichung | Oberwellenaufbau

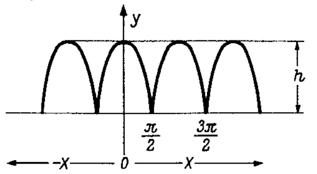
12



Halbwellen von sin- und —sin- Schwingungen

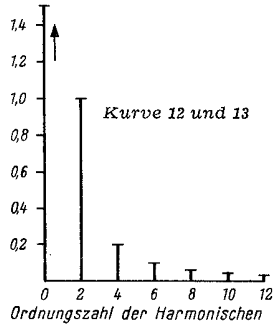
$$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} \dots\right)$$

13

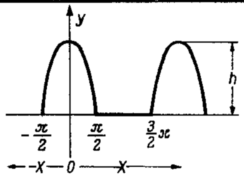


Halbwellen von cos- und —cos- Schwingungen

$$f(x) = \frac{2h}{\pi} - \frac{4h}{\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + - \dots\right)$$



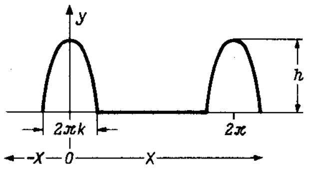
14



Halbwellen einer cos- Schwingung

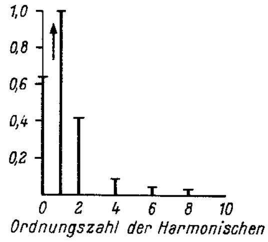
$$f(x) = \frac{h}{\pi} + \frac{h}{2}\cos x + \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} - + \dots\right)$$

15



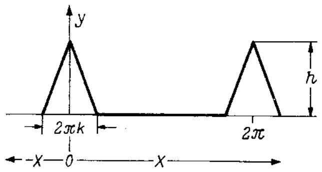
Halbwellen einer cos- Schwingung

$$f(x) = \frac{2kh}{\pi} + \frac{4kh}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi k}{1-4k^2n^2}\cdot \cos n x$$



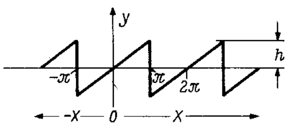
Kurve 14

16



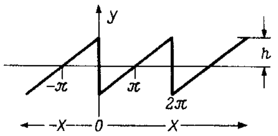
$$f(x) = \frac{hk}{2} + \frac{2h}{\pi^2 k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi k}{n^2}\cdot \cos nx$$

17

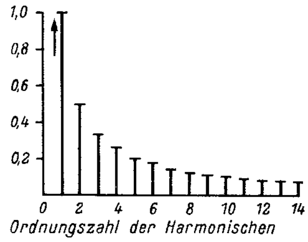


$$f(x) = \frac{2h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4}\right)$$

18

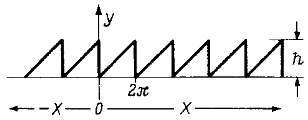


$$f(x) = -\frac{2h}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x \dots\right)$$



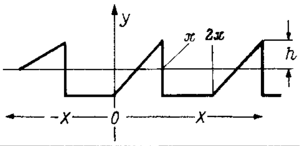
Kurve 17 und 18

19



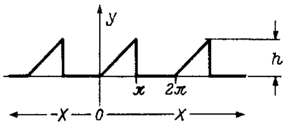
$$f(x) = \frac{h}{2} - \frac{h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots\right)$$

20

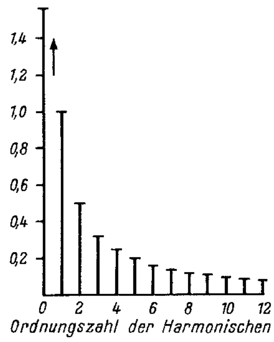


$$f(x) = -\frac{h}{2} - \frac{4h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} \dots\right) +$$
$$+ \frac{2h}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \dots\right)$$

21

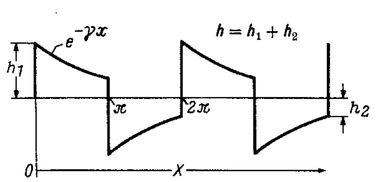


$$f(x) = \frac{h}{4} - \frac{2h}{\pi^2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{h}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right)$$



Kurve 19

22



$$f(x) = \frac{2h\gamma}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{\gamma^2+(2n+1)^2} +$$
$$+ \frac{2h}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\sin(2n+1)x}{\gamma^2+(2n+1)^2}$$

D. Anhang

Weiteres Beispiel für die Berechnung nach B4b, d.h. für die komplexe Schreibweise:
Gegeben seien nach **Bild 18** Dreieckimpulse.

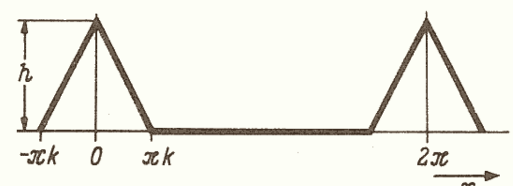


Bild 18

Die Gleichung einer Geraden lautet: y = ax + b (1)

Für die rechte Flanke des Dreiecks nach Bild 18 gilt:

y = h für x = 0 (2)

y = 0 für x = πk (3)

(2) und (3) nacheinander in (1) eingesetzt lassen a und b bestimmen:

y = h (1 – x/πk)

Entsprechend folgt für die linke Dreiecksflanke y = h (1 + x/πk)

Für die Fouriersche Reihe ergibt sich nun:

$$a_n = \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi k}^{0}\left(1+\frac{x}{\pi k}\right)e^{-inx}dx + \frac{h}{2\pi}\int_{0}^{\pi k}\left(1-\frac{x}{\pi k}\right)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{h}{2\pi}\int_{-\pi k}^{\pi k} e^{-inx}\,dx + \frac{h}{2\pi\cdot\pi k}\int_{-\pi k}^{0} x\cdot e^{-inx}dx - \frac{h}{2\pi\cdot\pi k}\int_{0}^{\pi k} x\cdot e^{-inx}dx$$

Für $\int x\cdot e^{-inx}dx$ kann geschrieben werden: $-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta n}\int e^{inx}dx$

$$a_n = \frac{h}{2\pi}\frac{-e^{-in\pi k}+e^{in\pi k}}{in} - \frac{h}{i2\pi^2 k}\frac{\delta}{\delta n}\int_{-\pi k}^{o} e^{-inx}dx + \frac{h}{i2\pi^2 k}\frac{\delta}{\delta n}\int_{0}^{\pi k} e^{-inx}dx$$

$$= \frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik}\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{1-e^{in\pi k}}{in}\right) - \frac{h}{2\pi^2 ik}\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{e^{-in\pi k}-1}{in}\right)$$

$$= \frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik}\frac{\delta}{\delta n}\left[\frac{1-e^{in\pi k}}{in} - \frac{e^{-in\pi k}-1}{in}\right]$$

$$= \frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\pi k + \frac{h}{2\pi^2 ik}\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{2-2\cos\, n\pi k}{in}\right)$$

$$= \frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\pi k + \frac{h}{\pi^2 k}\frac{\delta}{\delta n}\left(\frac{1-2\cos\, n\pi k}{n}\right)$$

$$= \frac{h}{\pi n}\cdot\sin n\pi k - \frac{h}{\pi^2 k}\left[\frac{n\pi k\cdot\sin n\pi k-(1-\cos n\pi k)}{n^2}\right]$$

$$= \frac{h}{\pi\cdot n}\cdot\sin n\pi k - \frac{h\cdot n\pi k\cdot\sin n\pi k}{\pi^2 k\cdot n^2} + \frac{h}{\pi^2 k}\cdot\frac{1-\cos\, n\pi k}{n^2} \qquad = \frac{h}{n^2 k}\cdot\frac{1-\cos\, n\pi k}{n^2}$$

Setzt man zur Bestimmung von a_0 n = 0, so wird der Ausdruck =0. Man muß deshalb Zähler und Nenner nach n differenzieren.

$$a_0 = \frac{h\cdot\pi k\cdot\sin n\pi k}{\pi^2 k\cdot 2n}$$

Setzt man noch sin x = x (für kleine Argumente), so erhält man:

$$a_0 = \frac{h\cdot\pi k\cdot n\pi k}{\pi^2 k\cdot 2n} = \frac{h\cdot k}{2}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{1}\frac{h}{n^2 k}\cdot\frac{1-\cos\, n\pi k}{n^2}\cdot e^{inx} + \frac{h\cdot k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{n^2 k}\cdot\frac{1-\cos\, n\pi k}{n^2}\cdot e^{inx}$$

Setzt man im ersten Summanden (s. B 4d) für n -n, so erhält man:

$$f(x) = \frac{h\cdot k}{2} + 2\cdot\frac{h}{n^2 k}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\, n\pi k}{n^2}\cdot\cos nx$$
