Wir betrachten eine Anordnung aus zwei kurzen Spulen in einer Ebene, deren Spulenachsen stets parallel gerichtet sein sollen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dabei die erste Spule in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt werden und die Spulenachse parallel zur x-Achse ausgerichtet werden. Diese Anordnung ist in Abbildung 1 gezeigt. (Achtung: Die x-Achse ist hier vorteilhafter die vertikale Achse)

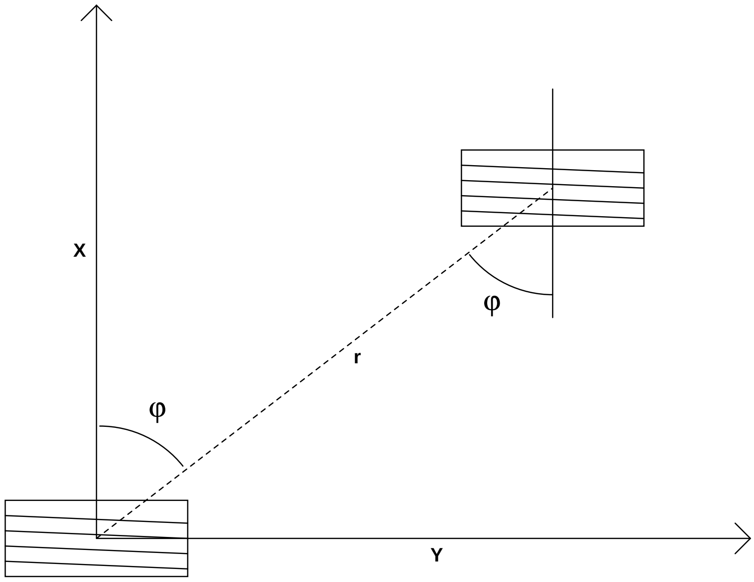

Abbildung 1: Anordung von zwei Spulen mit parallelen Achsen

Nun wird gedanklich die erste Spule im Koordinatenursprung bis hin zu einer verschwindend kleinen Ausdehnung verkleinert, wobei der Strom darin gleichzeitig so gesteigert wird, dass das magnetische Dipolmoment konstant bleibt. Diese Spule mit verschwindend kleiner Ausdehnung stellt dann einen idealen magnetischen Dipol dar, der ein B-Feld im Raum erzeugt, das durch [1]

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{1}{r^3}\vec{m}\right) \tag{1}$$

gegeben ist. Dabei ist $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment der Spule und $r = |\vec{r}|$ der Betrag des Ortsvektors. Da die Achse dieser Spule parallel zu x-Achse verläuft, ist

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich durch Einsetzen von $\vec{m}$ in (1) unter Verwendung von

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

der Ausdruck

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 m_x}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \\ \frac{3xy}{r^5} \\ \frac{3xz}{r^5} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Wird nun die zweite Spule ebenfalls gedanklich bis hin zu einer verschwindend kleinen Ausdehnung verkleinert, so kann das B-Feld über die Ausdehnung der Querschnittsfläche der Spule als konstant betrachtet werden. Der magnetische Fluß des von der ersten Spule erzeugten B-Feldes durch die Querschnittsfläche der zweiten Spule und damit die magnetische Kopplung der beiden Spulen verschwindet dann unter der Bedingung

$$\vec{n} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{3}$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Querschnittsfläche der zweiten Spule ist. Dieser zeigt natürlich in Richtung der Spulenachse. Da die Achsen der Spulen parallel zueinander sein sollen, muss

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sein. Damit folgt aus der Bedingung (3) für das Verschwinden der magnetischen Kopplung zwischen den Spulen zusammen mit Gleichung (2) die Bestimmungsgleichung

$$\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} = 0$$

für die Orte, an denen die zweite Spule von der ersten magnetisch entkoppelt ist. Aus Abbildung 1 ergibt sich sofort der Zusammenhang

$$x = r \cos \varphi$$

was in die obige Bestimmungsgleichung eingesetzt auf

$$\frac{3}{r^3} \cos^2 \varphi - \frac{1}{r^3} = 0$$

führt. Da $\varphi < 90°$ sein soll, wird die obige Gleichung für alle $r \neq 0$ gelöst durch

$$\varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx 54.7356°$$

Dies ist der “Magic Angle”, bei dem unabhängig vom Abstand r der Spulen eine vollständige magnetische Entkopplung erfolgt.

Literatur

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Magnetic_dipole