Normierte Resonanzkurven von Schwingkreisen

Dipl.-Phys. Jochen Bauer

10.04.2014

Einführung und Motivation

LC-Schwingkreise werden in der Funktechnik neben der Erzeugung von Schwingungen sehr häufig als Frequenzfilter verwendet. Ein typisches Beispiel dafür ist die Vorselektion und Spiegelfrequenzunterdrückung im Eingangskreis eines Superheterodynempfängers. Entscheidend für die Funktion als Frequenzfilter ist der Verlauf der Resonanzkurve, die vom Verlustverhalten (Gütefaktor) des Schwingkreises bestimmt wird.

Die Verluste im Schwingkreis können bekanntermaßen entweder mit einem Parallelwiderstand zum LC Kreis oder einem Serienwiderstand im LC Kreis modelliert werden. Im Folgenden wird daher sowohl der von einer Stromquelle angetriebene Parallelresonanzkreis mit Parallelwiderstand als auch der von einer Spannungsquelle angetriebene Serienresonanzkreis mit Serienwiderstand betrachtet. Es wird gezeigt, dass durch Übergang von den Verlustwiderständen zu dem etwas abstrakteren Gütefaktor Q sowie durch geeignete Normierung der Resonanzkurve beide Varianten mit einer vereinheitlichten Resonanzkurve beschrieben werden können.

Mit Hilfe der vereinheitlichten Resonanzkurve kann dann sehr einfach die bekannte Formel für den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Gütefaktor eines Schwingkreises abgeleitet werden.

Stromgetriebener Parallelresonanzkreis

Der von einer HF-Stromquelle angetriebene Parallelresonanzkreis mit Verlustwiderstand R_P parallel zum LC-Kreis ist in Abbildung 1 dargestellt. In der Praxis entspricht dies z.B. einem Parallelresonanzkreis im Anodenkreis einer Pentode. Die gemessene Größe ist in diesem Fall die Spannung $U(t)$ am Parallelresonanzkreis

Mit den Regeln der komplexen Wechselstromrechnung ergibt sich für den komplexen Gesamtwiderstand Z_P des Parallelresonanzkreises

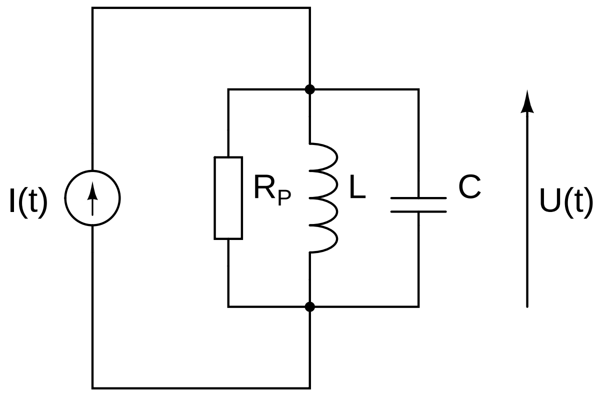

Abbildung 1: Parallelresonanzkreis, Antrieb durch eine Wechselstromquelle

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{R_P} + \frac{1}{X_C} + \frac{1}{X_L}$$

Mit den komplexen Widerständen des Kondensators X_C und der Spule X_L

$$X_C = \frac{1}{j\omega C} \quad \text{und} \quad X_L = j\omega L$$

folgt damit

$$Z_P = \frac{1}{\frac{1}{R_P} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}$$

Der Betrag des komplexen Widerstandes des Parallelresonanzkreises ergibt sich damit zu

$$|Z_P| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_P^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{1}$$

Die am Parallelresonanzkreis abfallende komplexe Spannungsamplitude $\hat{U}$ sowie deren Betrag ist gegeben durch

$$\hat{U} = Z_P \hat{I} \quad \text{bzw.} \quad |\hat{U}| = |Z_P||\hat{I}|$$

Aus Gleichung (1) folgt sofort, dass $|\hat{U}|$ sein Maximum

$$|\hat{U}|_{max} = R_P|\hat{I}|$$

bei der Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{2}$$

des Schwingkreises erreicht. Damit ergibt sich der amplituden-normierte Spannungsverlauf am Parallelresonanzkreis zu

$$\frac{|\hat{U}|}{|\hat{U}|_{\max}} = \frac{|Z_P|}{R_P} = \frac{1}{\sqrt{1 + R_P^2\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{3}$$

Der Gütefaktor Q des Parallelresonanzkreises hängt mit dem Parallelverlustwiderstand R_P, der Induktivität L und der Kapazität C zusammen gemäß [1]

$$Q = R_P\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Eingesetzt in Gleichung (3) ergibt dies nach einigen Umformungen

$$\frac{|\hat{U}|}{|\hat{U}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)^2}}$$

Damit kann nun mit der Resonanzfrequenz ω_0 aus Gleichung (2) sofort eine weitere Normierung auf der Frequenzachse durchgeführt werden und man erhält schließlich

$$\boxed{\frac{|\hat{U}|}{|\hat{U}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right)^2}}} \tag{4}$$

Spannungsgetriebener Serienresonanzkreis

Betrachten wir nun den von einer Spannungsquelle angetriebenen Serienresonanzkreis mit Verlustwiderstand R_S in Serie im LC-Kreis wie in Abbildung 2 dargestellt. Die gemessene Größe ist in diesem Fall der Strom $I(t)$ im Resonanzkreis.

Der komplexe Widerstand Z_S, den die Spannungsquelle sieht ist in diesem Fall

$$Z_S = R_S + X_C + X_L = R_S + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

und damit

$$Z_S = R_S + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Der Betrag des komplexen Widerstandes der Serienresonanzkreises ergibt sich daraus zu

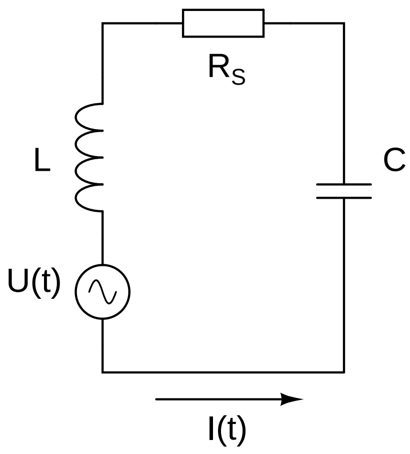

Abbildung 2: Serienresonanzkreis, Antrieb durch eine Wechselspannungsquelle

$$|Z_S| = \sqrt{R_S^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{5}$$

Die komplexe Stromamplitude $\hat{I}$ im Serienresonanzkreis und deren Betrag ist

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z_S} \quad \text{bzw.} \quad |\hat{I}| = \frac{|\hat{U}|}{|Z_S|}$$

Aus Gleichung (5) folgt sofort, dass $|\hat{I}|$ sein Maximum

$$|\hat{I}|_{\max} = \frac{|\hat{U}|}{R_S}$$

ebenfalls bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ des Schwingkreises erreicht. Eine analog zum vorherigen Abschnitt durchgeführte Amplitudennormierung führt damit auf

$$\frac{|\hat{I}|}{|\hat{I}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R_S^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{6}$$

Der Gütefaktor Q eines Serienresonanzkreises hängt mit dem Serienverlustwiderstand R_S, der Induktivität L und der Kapazität C zusammen gemäß [1]

$$Q = \frac{1}{R_S}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Diese Beziehung ergibt mit Gleichung (6) zunächst

$$\frac{|\hat{I}|}{|\hat{I}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)^2}}$$

Genau wie im vorherigen Abschnitt kann auch hier in der obigen Gleichung mit $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ sofort eine Normierung auf der Frequenzachse durchgeführt werden und man erhält letztendlich

$$\boxed{\frac{|\hat{I}|}{|\hat{I}|_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right)^2}}} \tag{7}$$

was völlig identisch zur normierten Spannungskurve des Parallelresonanzkreises (4) aus dem vorherigen Abschnitt ist.

Die vereinheitlichte normierte Resonanzkurve

Die Identität der normierten Spannungskurve des Parallelresonanzkreises (4) und der normierten Stromkurve des Serienresonanzkreises (7) unter Beachtung der jeweiligen Gütefaktoren Q legt die Einführung einer allgemeinen normierten Resonanzkurve, gegeben durch

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}} \tag{8}$$

nahe. Dabei ist

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

die bereits in den vorherigen Abschnitten eingeführte normierte Frequenz und der Funktionswert $f(x)$ entspricht der amplituden-normierten Spannung am Parallelresonanzkreis bzw. dem amplituden-normierten Strom im Serienresonanzkreis. Es ist sofort offensichtlich, dass die Gestalt der Resonanzkurve lediglich vom Gütefaktor Q des Schwingkreises abhängt. Der bekannte Verlauf der Resonanzkurve ist für verschiedene Gütefaktoren in Abbildung 3 dargestellt.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass die Resonanzkurven für alle endlichen Gütefaktoren Q **nicht** exakt symmetrisch zur Resonanzfrequenz $x_0 = \omega_0/\omega_0 = 1$ sind [1].

[1] Die Näherungsweise Annahme einer Symmetrie ist in manchen Fällen zulässig, führt aber z.B. bei der Ableitung der Beziehung zwischen Gütefaktor und Bandbreite zu Abweichungen vom korrekten Ausdruck.

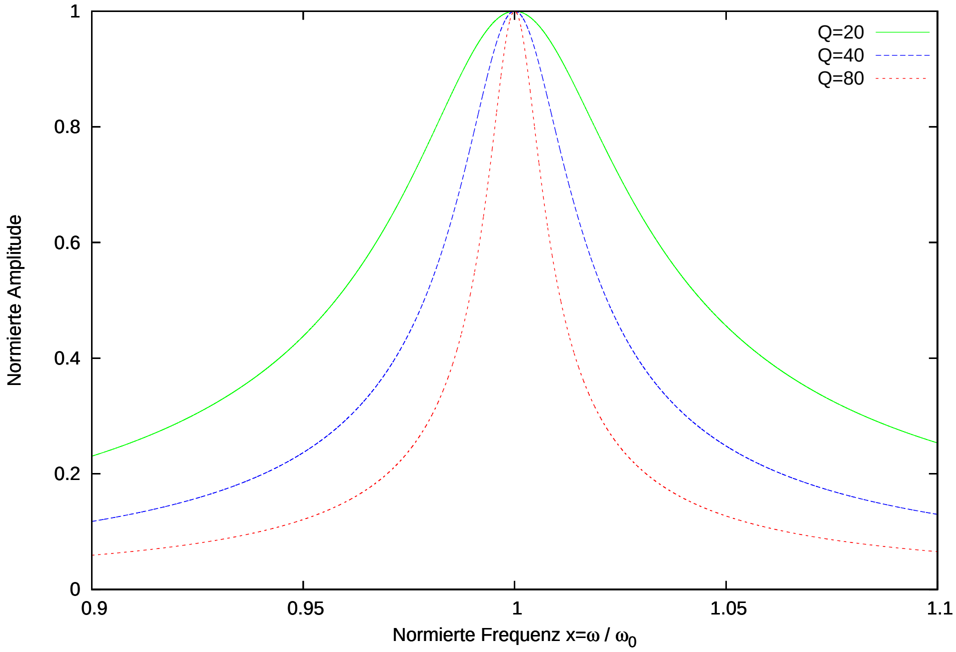

Abbildung 3: Verlauf der Resonanzkurve für verschiedene Gütefaktoren Q

Grenzfrequenzen und Bandbreite

Eine wesentliche Kenngröße eines Frequenzfilters sind die Frequenzen, bei denen das Ausgangssignal (Spannung bzw. Strom) auf einen Faktor von $1/\sqrt{2}$ des maximalen Ausgangssignal abgesunken ist, was einem Absinken um ca. 3dB entspricht. Man spricht daher auch von den -3dB Grenzfrequenzen. Die Bandbreite ist definiert als der Frequenzabstand der beiden Grenzfrequenzen. Dies ist in Abbildung 4 nochmals veranschaulicht.

Die Berechnung der beiden normierten Grenzfrequenzen x_1 und x_2 erfolgt aus der allgemeinen normierten Resonanzkurve $f(x)$ über den Ansatz

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

was auf die Bedingung

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \tag{9}$$

führt. Da der Ausdruck $x - 1/x$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, muss bei der Auflösung der obigen quadratischen Gleichung auf eine korrekte Fallunterscheidung geachtet werden.

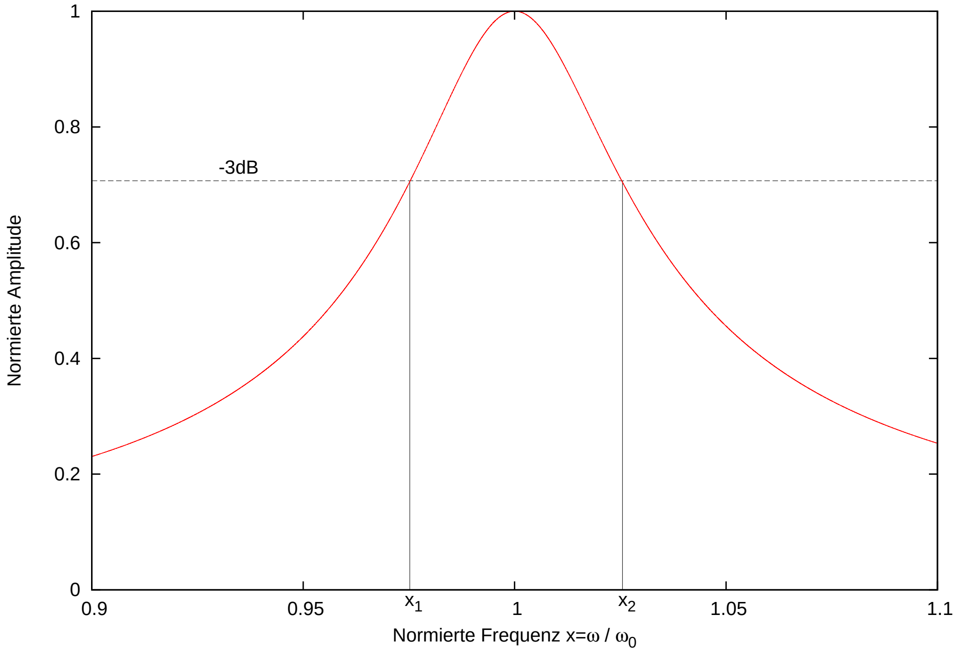

Abbildung 4: Grenzfrequenzen und Bandbreite

i.) $\quad x - 1/x \geq 0$

In diesem Fall folgt aus Gleichung (9)

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = 1$$

woraus sich die quadratische Gleichung

$$x^2 - \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$x = \frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

ergibt. Da von diesen beiden Lösungen nur die positive physikalisch relevant ist, erhalten wir

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}}$$

Wenden wir uns nun dem zweiten Fall zu.

ii.) $x - 1/x < 0$

In diesem Fall folgt aus Gleichung (9)

$$Q\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1$$

woraus sich die quadratische Gleichung

$$x^2 + \frac{1}{Q}x - 1 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$x = -\frac{1}{2Q} \pm \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$$

ergibt. Da wiederum nur die positive dieser beiden Lösungen physikalisch relevant ist, erhalten wir

$$\boxed{x_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}}$$

Für die Bandbreite in normierten Frequenzeinheiten ergibt sich damit

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{Q}$$

und mit $x = \omega/\omega_0 = f/f_0$ folgt sofort der bekannte Ausdruck

$$\boxed{\frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = Q}$$

Literatur

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Gütefaktor