

Leiterschleifen und Rahmenantennen als Sendeantennen

Dipl.-Phys. Jochen Bauer

04.02.2012

Zusammenfassung

Die geschlossene Leiterschleife und die Rahmenantenne mit Gesamtabmessungen von wesentlich kleiner als $\lambda/4$ werden in der Praxis fast ausschließlich als Empfangsantenne und nicht als Sendeantenne genutzt, obwohl auch hier der Grundsatz der Reziprozität gelten sollte. In diesem Artikel sollen daher die physikalischen Gesetzmäßigkeiten von Leiterschleifen und Rahmenantennen im Sendebetrieb näher betrachtet werden. Dazu werden aus den Maxwell'schen Gleichungen die E- und B-Fernfelder der von einem Wechselstrom durchflossenen geschlossenen Leiterschleife hergeleitet. Es zeigt sich, dass die Erweiterung der hierfür gewonnenen Ausdrücke auf die Rahmenantenne sehr einfach möglich ist. Die wesentlichen Ergebnisse sind, dass die Leiterschleife/Rahmenantenne ein E- und B-Fernfeld besitzt welches mit $1/r$ abfällt und ein sich in genügend großer Entfernung an einem Punkt im Raum befindlicher Beobachter von der Leiterschleife/Rahmenantenne ausgehende elektromagnetische Wellen sieht. Es zeigt sich, dass das Fernfeldlinienbild der Leiterschleife/Rahmenantenne analog zum Fernfeldlinienbild eines Hertz'schen Dipols mit vertauschtem E- und B-Feld ist. Insbesondere ergibt sich, dass die Ausdrücke für die Fernfeldstärken der Leiterschleife/Rahmenantenne und des Hertz'schen Dipols strukturell gleich sind. Dies ermöglicht es, zu einem Hertz'schen Dipol mit einem gegebenen elektrischen Dipolmoment eine äquivalente Stromamplitude in der Leiterschleife/Rahmenantenne anzugeben, bei der diese die selben Fernfeldstärken wie dieser Hertz'sche Dipol produziert. Ausgehend davon kann gezeigt werden, dass bei praktischen Anwendungen die äquivalente Stromamplitude zu einer elektrischen Dipolantenne relativ hoch ist. Aufgrund des durch Skin- und Proximity-Effekt bei hohen Frequenzen stark erhöhten ohmschen Widerstandes von realen Drähten weisen Leiterschleife und Rahmenantenne daher höhere Verluste auf, was ihre fast vollständige Abwesenheit in der Praxis erklärt. Durch eine grobe Abschätzung über das magnetische Moment der Leiterschleife wird gezeigt, dass die Verhältnisse bei der Ferritantenne noch ungünstiger sind.

Hinweis: Der mathematisch weniger interessierte Leser kann die folgenden Abschnitte überspringen und direkt zum letzten Abschnitt (Diskussion der Ergebnisse) springen.

Die allgemeinen Wellengleichungen

Wir gehen aus von den Maxwell'schen Gleichungen im SI-System [5]:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (4)$$

Dabei ist $\vec{E}(\vec{r}, t)$ das elektrische Feld, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ die magnetische Flußdichte, $\rho(\vec{r}, t)$ die Ladungsdichte und $\vec{j}(\vec{r}, t)$ die Stromdichte jeweils am Ort \vec{r} zur Zeit t . μ_0 ist die magnetische Feldkonstante, ϵ_0 die elektrische Feldkonstante. Die im folgenden verwendete Vakuumlichtgeschwindigkeit c ergibt sich aus μ_0 und ϵ_0 gemäß

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen erlauben die Einführung eines skalaren Potentials $\Phi(\vec{r}, t)$ und eines Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r}, t)$ aus denen sich das elektrische Feld und die magnetische Flußdichte als

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) - \nabla \Phi(\vec{r}, t) \quad (5)$$

und

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (6)$$

ableiten lassen. Die Potentiale $\Phi(\vec{r}, t)$ und $\vec{A}(\vec{r}, t)$ sind dadurch noch nicht eindeutig festgelegt und können Eichtransformationen unterworfen werden, ohne dass sich die Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ dadurch verändern. Wählt man die Lorentz-Eichung mit

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\vec{r}, t) = 0$$

so ergeben sich aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende voneinander entkoppelte inhomogene Wellengleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}, t)$$

$$\Delta\vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t)$$

Die Lösung der obigen Wellengleichungen ist gegeben durch die Volumenintegrale

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (7)$$

bzw.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8)$$

Die ausführliche Herleitung dieses hier kurz dargestellten Sachverhaltes findet sich in den meisten Lehrbüchern der klassischen Elektrodynamik, z.B. in [1].

Das allgemeine Vektorpotential in Fernfeldnäherung

Ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ und die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ auf ein endliches Gebiet beschränkt und betrachtet man die Felder bzw. Potentiale in einem großen Abstand zu diesem Gebiet, so kann der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems in das Gebiet der von Null verschiedenen Ladungs- bzw. Stromdichte gelegt werden. Es ist dann in den Volumenintegralen des vorherigen Abschnittes $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$ und es kann eine Reihenentwicklung der Integranden der obigen Volumenintegrale bis zur einschließlich ersten Ordnung vorgenommen werden. Der Ausdruck für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ in Fernfeldnäherung ergibt sich damit zu [1]

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \vec{A}_1(\vec{r}, t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{cr^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{A}_2(\vec{r}, t) \quad (9)$$

mit

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \int dV' \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) \quad (10)$$

und

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = \int dV' (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}', t - r/c) \quad (11)$$

wobei $r = |\vec{r}|$ den Abstand vom Ursprung des Koordinatensystems und damit den Abstand vom Gebiet der von Null verschiedenen Ladungs- bzw. Stromdichte angibt.

Das Vektorpotential der Leiterschleife in Fernfeldnäherung

Wir wollen nun die Ergebnisse der vorherigen Abschnitte auf eine rechteckige Leiterschleife mit einer Drahtlänge von wesentlich kleiner als $\lambda/4$ anwenden. Um die Berechnungen möglichst einfach zu gestalten legen wir die Leiterschleife in einem kartesisches Koordinatensystem in die xy -Ebene im Raum und zwar mit der linken unteren Ecke in den Ursprung. Die Leiterschleife verläuft also von $(0, 0, 0)$ über $(x_0, 0, 0)$ weiter nach $(x_0, y_0, 0)$ von dort aus zu $(0, y_0, 0)$ und schließt sich wieder im Ursprung $(0, 0, 0)$. Dies ist in Abbildung 1 dargestellt.

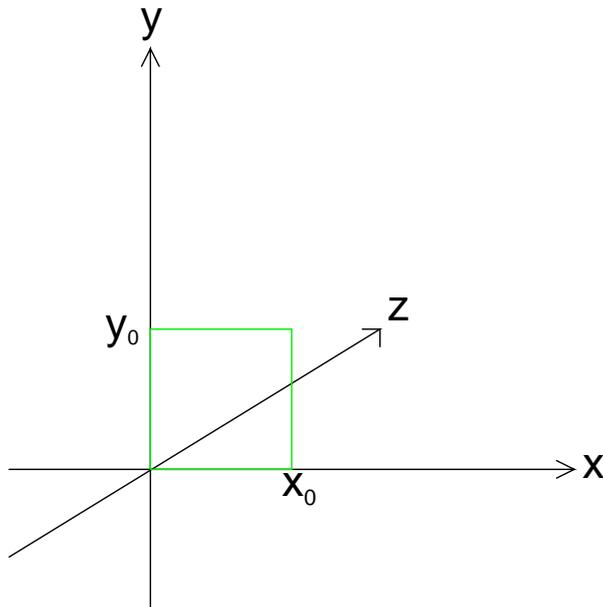


Abbildung 1: Leiterschleife im Raum

Da in der Berechnung des Vektorpotentials der Stromdichtevektor $\vec{j}(\vec{r}', t - c/r)$ immer als Integrand in Volumenintegralen vorkommt, können wir den Stromdichtevektor mit Hilfe von Dirac'schen Deltafunktionen $\delta(x - x_0)$ ausdrücken, die die Eigenschaften

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad ; \quad x \neq x_0$$

und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$$

besitzen. Dies entspricht der Idealisierung eines unendlich dünnen Drahtes. Der Ortsvektor \vec{r} ist in diesem Koordinatensystem durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit dem Betrag

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gegeben. Der Stromdichtevektor in Komponentenschreibweise ist damit:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} j_x(x, y, z, t) \\ j_y(x, y, z, t) \\ j_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}$$

Da die Leiterschleife wesentlich kürzer als $\lambda/4$ sein soll ist der Strom in der Leiterschleife zu einem beliebigen Zeitpunkt t an allen Punkten nahezu gleich, und für eine von einem solchen Wechselstrom $I(t)$ durchflossene unendlich dünne Leiterschleife (wie in Abbildung 1 dargestellt) ergeben sich die Komponentenfunktionen des Stromdichtevektors zu:

$$j_x(x, y, z, t) = \begin{cases} I(t)\delta(z) (\delta(y) - \delta(y - y_0)) & ; 0 \leq x \leq x_0 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$j_y(x, y, z, t) = \begin{cases} I(t)\delta(z) (\delta(x - x_0) - \delta(x)) & ; 0 < y < y_0 \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

$$j_z(x, y, z, t) = 0$$

Durch Wechsel der Argumente von x, y, z, t zu $x', y', z', t - r/c$ und Einsetzen in (10) und (11) ergibt sich nach komponentenweiser Ausführung der Integration

$$\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\vec{A}_2(\vec{r}, t) = I(t - r/c) x_0 y_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit durch Einsetzen in (9)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{cr^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) I(t - r/c) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

für das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ im Fernfeld. Dabei wurde verwendet, dass $x_0 y_0$ der Fläche a der Leiterschleife entspricht. Wenn die Stromstärke $I(t)$ von der Form $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$ und damit $I(t - r/c) = \hat{I} \sin(\omega(t - r/c))$ ist, produziert der Differentialoperator $\partial/\partial t$ in der obigen Gleichung auf $I(t - r/c)$ angewendet keine weitere r -Potenz im Ergebnis und für $r \gg \lambda$ kann in der obigen Gleichung der $1/r^3$ Term vernachlässigt werden. Dies gilt analog auch für $I(t) = \hat{I} \cos(\omega t)$ und damit auch für periodische Funktionen, die sich über Fourier-Reihen ausdrücken lassen. Dabei ist aber zu beachten, dass für alle in der Praxis relevanten Oberwellen ebenfalls die Drahtlänge der Leiterschleife klein gegenüber deren Wellenlänge sein muss. Es ist dann

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a}{4\pi} \frac{1}{cr^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Dieses und alle daraus abgeleiteten Ergebnisse sind auf sehr einfache Art und Weise auf die Rahmenantenne mit n Windungen zu übertragen. Dies geschieht durch folgende Überlegung: Da wir auch für die Rahmenantenne fordern, dass die gesamte Drahtlänge wesentlich kleiner als $\lambda/4$ sein soll, fließt auch in allen Windungen der Rahmenantenne zu jedem Zeitpunkt t nahezu der selbe Strom $I(t)$. Der Abstand der Windungen soll, wie bei der Rahmenantenne üblich, klein gegenüber der Kantenlänge bzw. dem Durchmesser des Rahmens sein. Ein sich in größerer Entfernung befindlicher Beobachter sieht daher keine individuellen Windungen, die von einem Strom $I(t)$ durchflossen werden mehr, sondern einen Strom $nI(t)$ der sich um den Rahmen herum bewegt. Bezüglich des Fernfeldes kann die Rahmenantenne mit n Windungen daher wie eine einfache Leiterschleife mit der selben Fläche, die von dem Wechselstrom $nI(t)$ durchflossen wird, behandelt werden.

Das elektrische Fernfeld der Leiterschleife

Das elektrische Fernfeld wird aus den Potentialen $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\Phi(\vec{r}, t)$ gemäß (5) berechnet. Für das skalare Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ folgt aus (7)

$$\Phi(\vec{r}, t) = 0$$

da die Leiterschleife an allen Punkten elektrisch neutral ist und daher $\rho(\vec{r}, t) = 0$ gilt. Die Gleichung (5) vereinfacht sich daher zu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Einsetzen von $\vec{A}(\vec{r}, t)$ aus (12) liefert dann

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\mu_0 a}{4\pi} \frac{1}{cr^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} I(t - r/c) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im einfachsten Fall einer periodischen Stromfunktion

$$I(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$$

ergibt dies

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c} \frac{1}{r^2} \sin(\omega(t - r/c)) \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll zu Kugelkoordinaten überzugehen. Wir verwenden die z.B. in [3] beschriebene übliche Konvention, also

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned} \quad (14)$$

womit natürlich

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

automatisch erfüllt ist. Damit wird (13) zu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin(\omega(t - r/c)) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das magnetische Fernfeld der Leiterschleife

Die magnetische Flußdichte $\vec{B}(\vec{r}, t)$ wird aus dem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ gemäß (6) berechnet. Bei der Berechnung der partiellen Ableitungen nach den Ortskoordinaten x, y, z ist zu beachten, dass der Betrag des Ortsvektors von diesen Variablen gemäß $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt. Für die benötigten partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen von $\vec{A}(\vec{r}, t)$ ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_y}{\partial z} &= \frac{\mu_0 a}{4\pi c} x \gamma \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} &= -\frac{\mu_0 a}{4\pi c} y \gamma \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} &= \frac{\mu_0 a}{4\pi c} \left(x \alpha + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \right) \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} &= -\frac{\mu_0 a}{4\pi c} \left(y \beta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \right)\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \right) \\ \beta &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \right) \\ \gamma &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} I(t - r/c) \right)\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$ bzw. $I(t - r/c) = \hat{I} \sin(\omega(t - r/c))$ ergibt sich α zu

$$\alpha = \hat{I} \omega \left(\frac{-2x}{r^4} \cos(\omega(t - r/c)) + \frac{\omega x}{c r^3} \sin(\omega(t - r/c)) \right)$$

Da nun wieder $r \gg \lambda$ ist, ergibt sich näherungsweise

$$\alpha = \frac{\hat{I} \omega^2}{c} \frac{x}{r^3} \sin(\omega(t - r/c))$$

Die Berechnung von β und γ erfolgt analog und ergibt

$$\beta = \frac{\hat{I} \omega^2}{c} \frac{y}{r^3} \sin(\omega(t - r/c))$$

sowie

$$\gamma = \frac{\hat{I} \omega^2}{c} \frac{z}{r^3} \sin(\omega(t - r/c))$$

Damit ist die magnetische Flußdichte $\vec{B}(\vec{r}, t)$ der Leiterschleife im Fernfeld

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \left(\begin{array}{c} -\frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r^3} \sin(\omega(t - r/c)) xz \\ -\frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r^3} \sin(\omega(t - r/c)) yz \\ \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega}{4\pi c} \left(\frac{\omega}{c} \frac{1}{r^3} \sin(\omega(t - r/c)) (x^2 + y^2) + \frac{2}{r^2} \cos(\omega(t - r/c)) \right) \end{array} \right) \quad (15)$$

Gehen wir nun wieder zu den im vorherigen Abschnitt eingeführten Kugelkoordinaten (14) über, so wird dies zu

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \sin(\omega(t - r/c)) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}$$

wobei wir wiederum wegen $r \gg \lambda$ den in der z-Komponente zusätzlich auftretenden \cos -Term wegen dessen $1/r^2$ Abhängigkeit gegenüber dem \sin -Term, der mit $1/r$ geht, vernachlässigt haben.

Diskussion der Ergebnisse

Zunächst wollen wir für den Leser, der die oberen Abschnitte übersprungen hat, die gewonnenen Ergebnisse nochmals zusammenstellen.

Für die von einem Wechselstrom $I(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$ durchflossene geschlossene Leiterschleife mit Abmessungen wesentlich kleiner als $\lambda/4$ in der xy -Ebene eines Kartesischen Koordinatensystems im Raum mit der linken unteren Ecke im Ursprung gemäß Abbildung 1 wurde aus den Maxwell'schen Gleichungen das elektrische Fernfeld zu

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c} \frac{1}{r} \sin(\omega(t - r/c)) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

und die magnetische Flußdichte im Fernfeld zu

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \sin(\omega(t - r/c)) \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (17)$$

bestimmt. Zur bequemerem Darstellung wurden Kugelkoordinaten r, ϑ, φ verwendet, die mit den kartesischen Koordinaten x, y, z über

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\vartheta) \end{aligned}$$

verknüpft sind. Insbesondere ist r der Abstand vom Ursprung und damit der Abstand von der Leiterschleife und ϑ der Winkel zur z -Achse, also der Achse die senkrecht auf der Leiterschleife steht. Die Rahmenantenne mit n Windungen und einer Stromamplitude von \hat{I} ist dabei äquivalent zu einer einfachen Leiterschleife mit der Stromamplitude $n\hat{I}$. Als erstes Ergebnis sehen wir, dass sowohl ein mit

$1/r$ abfallendes magnetisches Fernfeld, als auch ein ebenfalls mit $1/r$ abfallendes elektrisches Fernfeld um die Leiterschleife existiert.

An dieser Stelle soll daher auf ein verbreitetes Mißverständnis über die Erzeugung von elektromagnetischen Wellen eingegangen werden. Dieses besagt, dass eine Antenne die nur ein magnetisches Feld (B-Feld) aber kein elektrisches Feld (E-Feld) erzeugt keine elektromagnetischen Wellen abstrahlen kann. Diese Annahme ist schon deshalb falsch, weil ein sich zeitlich änderndes B-Feld immer ein dazugehöriges E-Feld erzeugt. Dies folgt sofort aus der Maxwellschen Gleichung (3), welche die Wirbelstärke des E-Feldes mit der zeitlichen Änderungsrate des B-Feldes verknüpft.

Betrachten wir nun die Richtung der E-Feldvektoren aus (16) so fällt auf, dass diese parallel zur xy -Ebene verlaufen (da $E_z(\vec{r}, t) = 0$) und außerdem stets einen rechten Winkel mit dem Ortsvektor \vec{r} bilden (da $\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0$). Die Feldlinien des elektrischen Fernfeldes sind damit offensichtlich konzentrische Kreise um die z -Achse. Das E-Feldlinienbild zu einem festen Zeitpunkt t in der xy -Ebene ($\vartheta = \pi/2$) betrachtet ist in Abbildung 2 skizziert. Der Abstand zwischen je zwei gezeichneten Feldlinien ist $\lambda/2$.

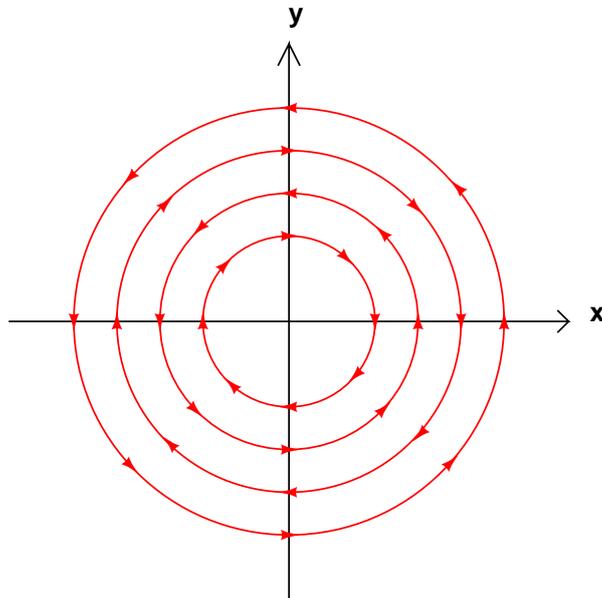


Abbildung 2: Momentaufnahme des E-Fernfeldes

An diesem Beispiel sind auch sehr schön die Auswirkungen der Fernfeldnäherung, also das vernachlässigen der Terme die mit $1/r^2$ oder noch stärker abfallen, zu sehen. Die Feldlinien des exakten (ungenäherten) E-Feldes weisen aufgrund der

rechteckigen Form der Leiterschleife eine Abweichung von der Kreisform auf. Diese Abweichung wird mit zunehmender Entfernung r immer minimaler und ist für große Entfernungen vernachlässigbar. Weiterhin liegt der Mittelpunkt der Feldlinien des exakten E-Feldes nicht genau auf der z -Achse, sondern etwas davon verschoben auf einer Achse, die parallel zur z -Achse durch den Mittelpunkt der Leiterschleife geht. Diese Abweichung ist ebenfalls für wachsende Entfernungen zunehmend vernachlässigbar. Um den Bereich um die z -Achse ($\vartheta \approx 0$) liefert die Fernfeldnäherung (16) ein verschwindendes E-Feld. Dies bedeutet nicht, dass das E-Feld hier tatsächlich verschwindet, sondern dass in diesem Bereich Terme, die mit $1/r^2$ und höheren Potenzen abfallen zum tragen kommen. Der Bereich um die z -Achse ist daher mit der verwendeten Fernfeldnäherung nicht zugänglich.

Als nächstes wollen wir die Gestalt der B-Feldlinien ermitteln. Aus (17) und (16) folgt durch direktes Nachrechnen, dass das Skalarprodukt $\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{B}(\vec{r}, t)$ stets verschwindet, die Vektoren des E-Feldes stehen also im Fernfeld immer senkrecht auf den Vektoren des B-Feldes. Damit schneiden sich deren Fernfeldlinien ebenfalls immer in einem rechten Winkel. Andererseits bestätigt man ebenfalls durch direktes Nachrechnen, dass auch $\vec{r} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0$ gilt, d.h. $\vec{B}(\vec{r}, t)$ steht immer senkrecht auf dem Ortsvektor \vec{r} . Da die E-Feldlinien, wie weiter oben gezeigt, konzentrische Kreise um die z -Achse darstellen und damit jede Ebene, die die z -Achse enthält senkrecht durchstoßen folgt, dass die B-Feldlinien Kreissegmente um den Ursprung in einer Ebene sind, die von der z -Achse und dem Ortsvektor \vec{r} aufgespannt wird. Das B-Feldlinienbild zu einem festen Zeitpunkt t in der xz -Ebene ($\varphi = 0$) betrachtet ist in Abbildung 3 skizziert. Der Abstand zwischen je zwei gezeichneten Feldlinien ist $\lambda/2$. Der Bereich um die z -Achse wird analog zum E-Feld von Termen höherer Ordnung beherrscht und ist daher mit der verwendeten Fernfeldnäherung ebenfalls nicht zugänglich. Qualitativ läßt sich jedoch folgern, dass sich benachbarte gegenläufige Feldlinien in diesem Gebiet schließen. Betrachten wir nun die Amplitudenverhältnisse von E-Feld und B-Feld. Durch Setzen von $\sin(\omega(t - r/c)) = 1$ erhält man aus (16) den Amplitudenvektor $\hat{\vec{E}}$ des elektrischen Fernfeldes zu

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die skalare Amplitude $\hat{E}(\vec{r})$ zu

$$\hat{E}(\vec{r}) = |\hat{\vec{E}}(\vec{r})| = \sqrt{\hat{\vec{E}}(\vec{r}) \cdot \hat{\vec{E}}(\vec{r})} = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c} \frac{1}{r} |\sin(\vartheta)| \quad (18)$$

Analog ergibt sich aus (17) der Amplitudenvektor $\hat{\vec{B}}$ der magnetischen Flußdichte des B-Fernfeldes zu

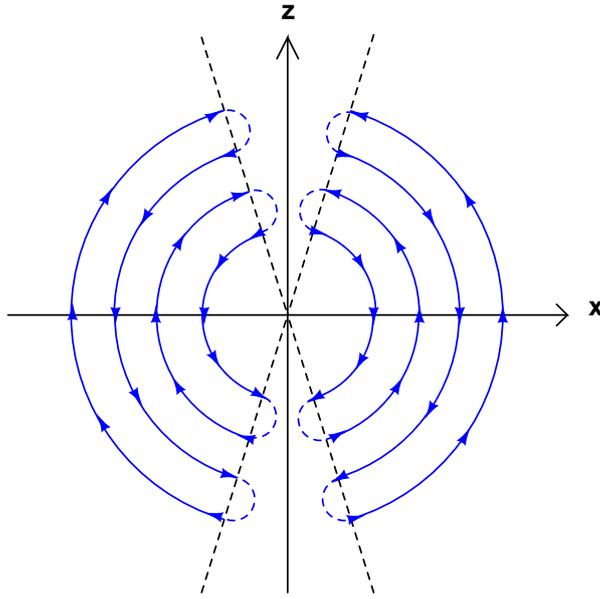


Abbildung 3: Momentaufnahme des B-Fernfeldes

$$\hat{\vec{B}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \cos(\varphi) \\ -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \sin(\varphi) \\ \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und die skalare Amplitude $\hat{B}(\vec{r})$ zu

$$\hat{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 a \hat{I} \omega^2}{4\pi c^2} \frac{1}{r} |\sin(\vartheta)| \quad (19)$$

Vergleicht man nun die skalaren Amplituden des E-Feldes und des B-Feldes, so ergibt sich der für ebene elektromagnetische Wellen bekannte Zusammenhang [4]

$$\hat{E}(\vec{r}) = c \hat{B}(\vec{r})$$

Damit, sowie der Orthogonalität von E-Fernfeld und B-Fernfeld folgt, dass ein Beobachter, der sich an einem Punkt im Raum in hinreichender Entfernung von der Leiterschleife befindet und der eine nicht zu große Umgebung um diesen Punkt betrachtet, näherungsweise ebene elektromagnetische Wellen an diesem Punkt einfallen sieht.

Die ermittelten Feldlinienbilder der Leiterschleife im Fernfeld zeigen eine große Ähnlichkeit zu den Feldlinienbildern eines Hertzschen Dipols im Fernfeld, allerdings mit vertauschtem E- und B-Feld. Wir wollen daher die Ergebnisse für die Leiterschleife nun auch quantitativ mit dem Hertzschen Dipol vergleichen, dessen

Eigenschaften z.B. in [6] zusammenfassend dargestellt sind. Mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ und $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$, sowie den Eigenschaften des Vektor-Kreuzproduktes folgen aus den dort gegebenen Ausdrücken für das Fernfeld die Gleichungen

$$\hat{E}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2 |\vec{P}|}{4\pi} \frac{1}{r} |\sin(\angle(\vec{r}, \vec{P}))|$$

$$\hat{B}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2 |\vec{P}|}{4\pi c} \frac{1}{r} |\sin(\angle(\vec{r}, \vec{P}))|$$

für die skalaren Amplituden $\hat{E}_D(\vec{r})$ und $\hat{B}_D(\vec{r})$ des E-Fernfeldes \vec{E}_D bzw. des B-Fernfeldes \vec{B}_D des Hertzschen Dipols mit einem Dipolmoment \vec{P} . Es gilt auch hier wieder $\hat{E}_D(\vec{r}) = c \hat{B}_D(\vec{r})$. Legen wir nun diesen Dipol in dem bisher für die Leiterschleife verwendeten Koordinatensystem entlang der z -Achse durch den Ursprung, so ist $\angle(\vec{r}, \vec{P}) = \vartheta$ und es folgt

$$\hat{E}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2 |\vec{P}|}{4\pi} \frac{1}{r} |\sin(\vartheta)|$$

$$\hat{B}_D(\vec{r}) = \frac{\mu_0 \omega^2 |\vec{P}|}{4\pi c} \frac{1}{r} |\sin(\vartheta)|$$

Vergleicht man dies mit den entsprechenden Ausdrücken für die Leiterschleife (18) und (19), so sieht man, dass die Fernfeldstärken einer Leiterschleife bzw. Rahmenantenne als Sendeantenne gegenüber einem Hertzschen Dipol durch die Entsprechung

$$|\vec{P}| \leftrightarrow \frac{a \hat{I}}{c}$$

gegeben sind. Dies ist nicht weiter verwunderlich, denn schließlich ist $a \hat{I} = |\vec{m}|$ der Betrag des magnetischen Momentes der Leiterschleife [2]. Wir sind nun in der Lage bei einem gegebenen elektrischen Dipolmoment die äquivalente Stromamplitude \hat{I} zu berechnen, die ein durch eine Leiterschleife der Fläche a fließender Wechselstrom haben müsste, um die selben Fernfeldstärken zu erzeugen. Es ergibt sich aus der obigen Entsprechung sofort:

$$\hat{I} = \frac{c}{a} |\vec{P}|$$

Betrachten wir nun die in Abbildung 4 skizzierte elektrische Dipolantenne mit einer Länge von wesentlich kleiner als $\lambda/4$ als direkte Konkurrenz zur magnetischen Leiterschleife bzw. Rahmenantenne. Es handelt sich dabei im Prinzip um zwei kleine Kugeln im Abstand L , zwischen denen von einer Spannungsquelle die Spannung $U(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$ erzeugt wird. Sei C die Kapazität dieses "Kondensators", so ist die verschobene Ladung $Q = C \hat{U}$ und der Betrag des Dipolmomentes dieser Anordnung damit

$$|\vec{P}| = Ql = C\hat{U}L$$

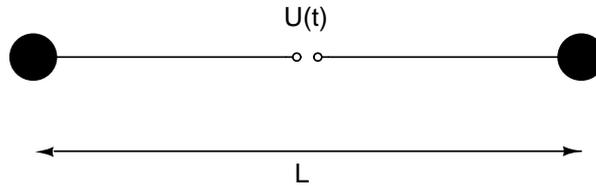


Abbildung 4: Dipolantenne

Seien die Kugeln nun so gewählt, dass $C = 10\text{pF}$ ist, so ergibt sich bei einem Abstand von $L = 1\text{m}$ und einer damit vergleichbaren Fläche der Leiterschleife von $a = 1\text{m}^2$ die äquivalente Stromamplitude \hat{I} in der Leiterschleife zu

$$\hat{I}[\text{mA}] \approx 3 \cdot \hat{U}[\text{V}]$$

Es müsste zum Beispiel bei einer Speisespannung von $\hat{U} = 100\text{V}$ bei der elektrischen Dipolantenne ein Wechselstrom mit $\hat{I} = 300\text{mA}$ durch die Leiterschleifenantenne fließen, damit beide die selben Fernfeldstärken erreichen. Wird statt der einfachen Leiterschleife eine Rahmenantenne mit 6 Windungen verwendet, so wäre die erforderliche Stromamplitude immer noch bei $\hat{I} = 50\text{mA}$. Aus diesen relativ hohen äquivalenten Stromamplituden erklärt sich die fast völlige Abwesenheit von Leiterschleifen und Rahmenantennen als Sendeantennen in der Praxis. Aufgrund des Skin-Effektes [7] und des Proximity-Effektes [8] ist bekanntermaßen bei hohen Frequenzen der ohmsche Widerstand eines realen Drahtes (Zuleitungen und Antenne selber) um ein vielfaches höher als für Gleichstrom. Die Verluste einer Leiterschleife/Rahmenantenne sind daher aufgrund der erforderlichen Stromstärken im Vergleich zur elektrischen Dipolantenne deutlich höher.

Bei Ferritantennen liegen die Verhältnisse meist noch ungünstiger. Geht man in grober Abschätzung davon aus, dass das Einbringen eines Ferritstabes in eine Spule deren magnetisches Moment um den Faktor 10^3 erhöht, so steht dem die nun deutlich kleinere Querschnittsfläche von vielleicht $2\text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$ der Spule um den Ferritstab entgegen, so dass die Gesamtverhältnisse um den Faktor 5 ungünstiger als bei einer Rahmenantenne mit 1m^2 Querschnittsfläche liegen. Dies wird noch dadurch verschlimmert, dass in der Spule um den Ferritkern aufgrund deren kleineren Abmessungen der Proximity-Effekt noch weit mehr zum tragen kommt als bei der Rahmenantenne.

Literatur

- [1] Jürgen Schnakenberg, *Elektrodynamik*, WILEY-VCH, 2003

- [2] Christian Gerthsen, Helmut Vogel, *Physik, Springer*, 1993
- [3] <http://de.wikipedia.org/wiki/Kugelkoordinaten>
- [4] http://de.wikipedia.org/wiki/Elektromagnetische_Welle
- [5] <http://de.wikipedia.org/wiki/Maxwell-Gleichungen>
- [6] http://de.wikipedia.org/wiki/Hertzscher_Dipol
- [7] <http://de.wikipedia.org/wiki/Skin-Effekt>
- [8] [http://de.wikipedia.org/wiki/Proximity-Effekt_\(Elektrotechnik\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Proximity-Effekt_(Elektrotechnik))