

### A. Aus einer Geraden entsteht durch Inversion ein Kreis

Für die Serienschaltung eines ohmschen Widerstandes und einer Induktivität gilt:

$$\mathfrak{R} = R + j\omega L \quad (1)$$

Diese Gleichung in Abhängigkeit von der Frequenz als Ortskurve gezeichnet bringt Bild 1. In allgemeiner Form läßt sich also die Gerade darstellen durch:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{B} + p \cdot C \quad (2)$$

Zu der Leitwertdarstellung kommt man durch Inversion

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{R + j\omega L} \quad (3)$$

oder allgemein

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{U}} = \frac{1}{\mathfrak{B} + p \cdot C} \quad (4)$$

Durch Umrechnung (s. Anhang) läßt sich (4) in folgende Form bringen:

$$\left( x - \frac{c_2}{2} \right)^2 + \left( y - \frac{c_1}{2} \right)^2 = \frac{\left( \frac{c_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{c_2}{2} \right)^2}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2} \quad (5)$$

Gleichung 5 verkörpert aber einen Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten

$$x_m = \frac{c_2}{2} \quad y_m = \frac{c_1}{2} \quad (6)$$

und dem Radius

$$r = \frac{\sqrt{\left( \frac{c_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{c_2}{2} \right)^2}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \quad (7)$$

Dieser Kreis geht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems ( $x = 0, y = 0$ ) hindurch, denn  $x_m^2 + y_m^2 = r^2$  (Bild 1a).

Bei der gebräuchlichen Darstellung fällt

R in Richtung der x-Achse und

L in Richtung der y-Achse;

das bedeutet in der allgemeinen Darstellung (2)

der Vektor  $\mathfrak{B}$  hat keine y-Komponente

$$b_2 = 0$$

der Vektor  $\mathfrak{C}$  hat keine x-Komponente

$$c_1 = 0$$

Somit vereinfachen sich die Gleichungen 6 und 7

$$x = \frac{\frac{c_2}{2}}{b_1 c_2} = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{2R} \quad y = 0 \quad r = \frac{\frac{c_2}{2}}{b_1 c_2} = \frac{1}{2b_1} = \frac{1}{2R}$$

## B. Das Leitwertdiagramm

Wie das Beispiel (Bild 2) zeigt, bewegt sich also die Spitze des Vektors für den Scheinleitwert  $\mathcal{G}$  auf einem Kreisbogen über der x-Achse. In diesem Fall ist also R konstant gehalten und X verändert worden. Diese Kreise nennt man R-Kreise.

In gleicher Weise ergeben sich Kreise, wenn man X konstant läßt und R verändert X-Kreise (Bild 3).

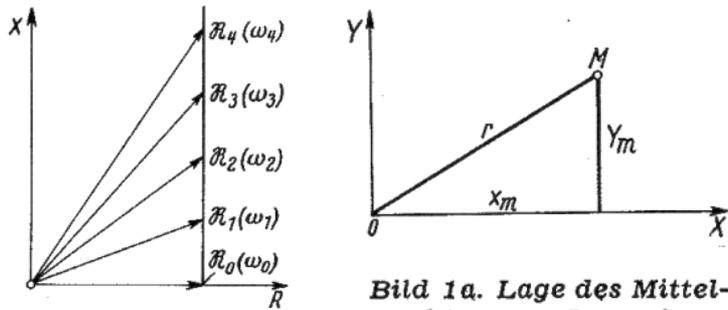


Bild 1a. Lage des Mittelpunktes vom Inversionskreis

R Ω	f Hz	ωL Ω	G mS	Y mS
100	100	10	9,9	1
	200	20	9,6	1,9
	500	50	8	4
	1000	100	5	5
	2000	200	2	4
100	5000	500	0,4	1,9
	10000	1000	0,1	1

Bild 1. Serienschaltung eines ohmschen Widerstandes und einer Induktivität (f = veränderlich)

G und Y nach FtA Uf 11/2a bestimmt

Mittelpunktabstand des Kreises

$$= \frac{1}{2R} = \frac{1}{200(\Omega)} = 5 \text{ ms}$$

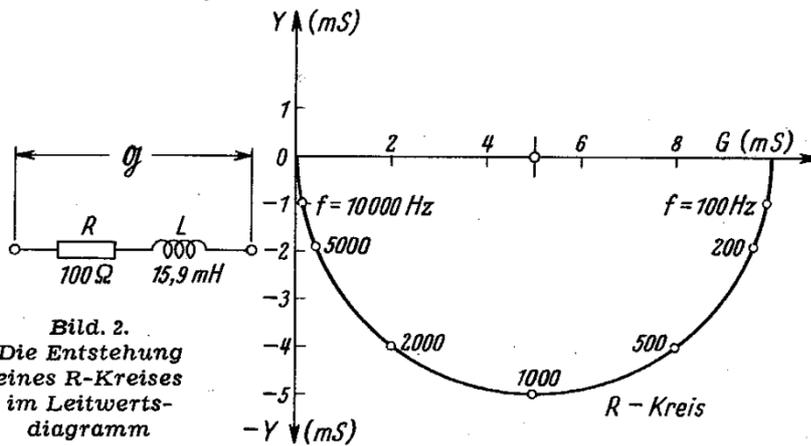


Bild 2. Die Entstehung eines R-Kreises im Leitwertdiagramm

So entsteht das Leitwertdiagramm (Bild 4). Es ist gekennzeichnet durch folgende Einzelheiten:

x-Achse gibt den ohmschen Leitwert G

y-Achse gibt den Blindleitwert Y  
Richtung nach oben = kapazitive Leitwerte

Richtung nach unten = induktive Leitwerte

Kreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse = R-Kreise

Kreise mit Mittelpunkt auf der y-Achse = X-Kreise

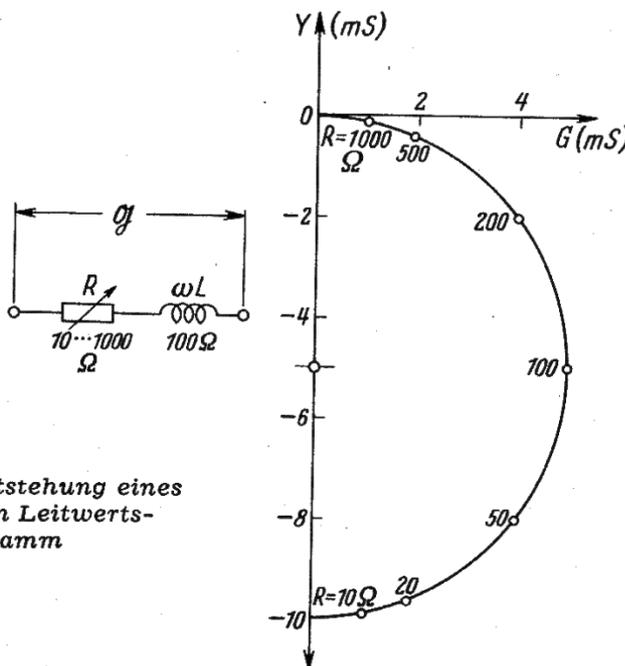


Bild 3. Die Entstehung eines X-Kreises im Leitwertdiagramm

## C. Das Widerstandsdiagramm

Ist umgekehrt die Aufgabe gestellt, eine in Leitwerten gegebene Schaltung auf Widerstandswerte umzurechnen (Bild 5), dann gelten die analogen Überlegungen und es entsteht das Widerstandsdiagramm (Bild 6). Seine Eigenschaften sind:

x-Achse gibt den ohmschen Widerstand R  
 y-Achse gibt den Blindwiderstand X  
 Richtung nach oben = induktive Widerstände  
 Richtung nach unten = kapazitive Widerstände  
 Kreise mit Mittelpunkt auf der x-Achse = G-Kreise  
 Kreise mit Mittelpunkt auf der y-Achse = Y-Kreise

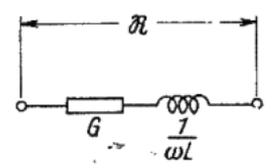
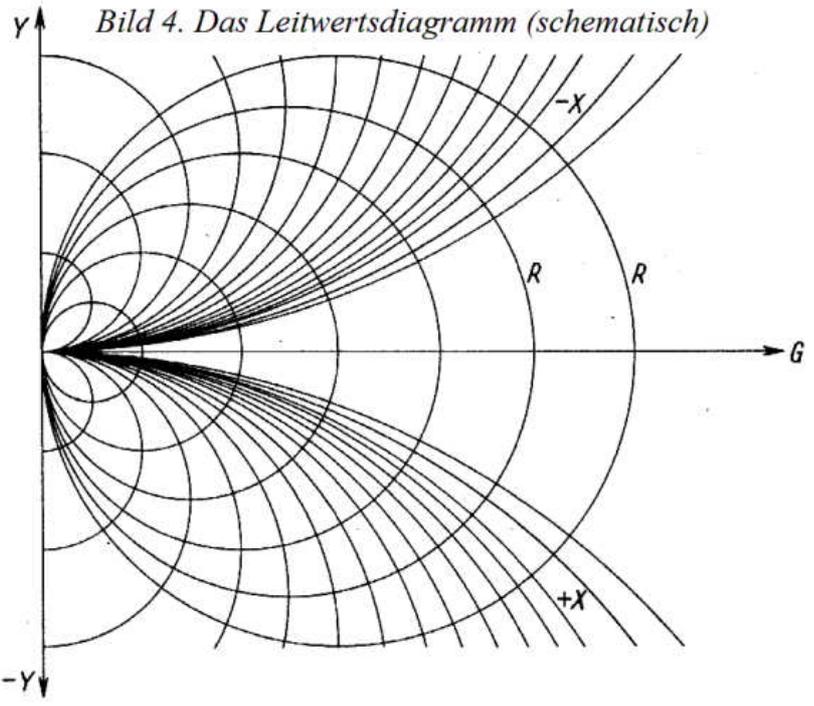
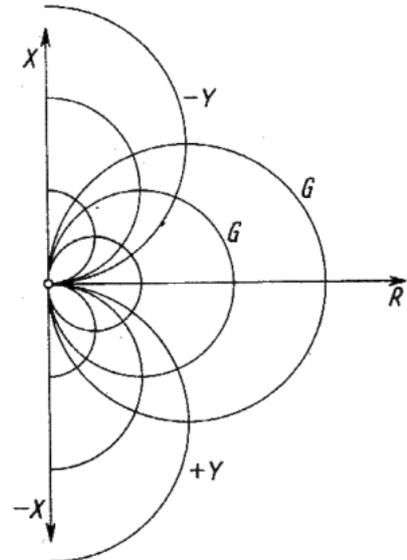


Bild 5. Übergang von Leitwerten auf Widerstandswerte



Rechts: Bild 6. Das Widerstandsdiagramm (schematisch)

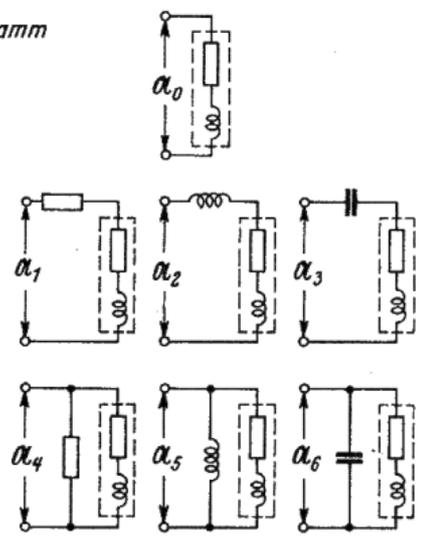
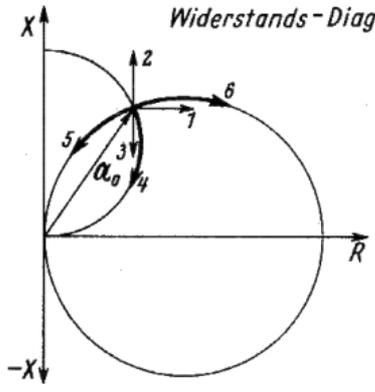


Bild 7. Widerstandsdiagramm. Die Änderung der Lage eines Vektors bei Reihen- oder Parallelschaltung verschiedener Widerstände

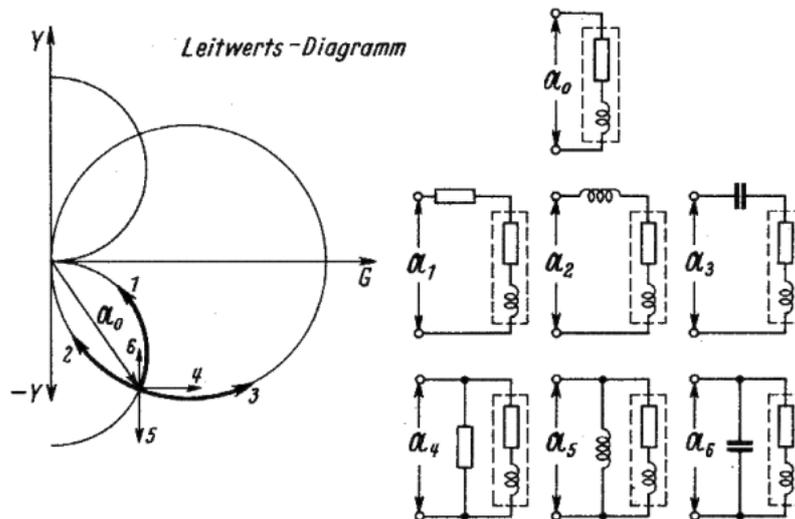


Bild 8. Leitwertdiagramm. Die Änderung der Lage eines Vektors bei Reihen- oder Parallelschaltung verschiedener Widerstände

### D. Konstruktion der Diagramme

Man benutzt für beide Darstellungen das gleiche Diagramm. Der Unterschied besteht nur in der Bezifferung.

Widerstandsdiagramm

Ziffern am Achsenkreuz bedeuten  $\Omega$  - Werte

Ziffern an den Kreisen (G- und Y-Kreis)

sind in S auszudrücken

Die Mittelpunkte der G-Kreise liegen auf der x-Achse.

Die Mittelpunkte der Y-Kreise liegen auf der y-Achse.

Leitwertdiagramm

Ziffern am Achsenkreuz bedeuten S-Werte

Ziffern an den Kreisen (Rund x-Kreis)

sind in  $\Omega$  auszudrücken

Die Mittelpunkte der R-Kreise liegen auf der x-Achse.

Die Mittelpunkte der X-Kreise liegen auf der y-Achse.

Alle Kreise gehen durch den Nullpunkt des Koordinatensystems. Die R- bzw. G-Kreise schneiden außerdem die x-Achse bei dem Zahlenwert, der reziprok zu ihrer Benennung ist.

Beispiel:

Der R-Kreis mit der Benennung 0,4 ( $\Omega$ ) schneidet die x-Achse im Punkte 2,5 (S)

Der G-Kreis mit der Benennung 10 (S) schneidet die x-Achse im Punkte 0,1 ( $\Omega$ )

Das Analoge gilt für die Schnittpunkte der X- bzw. Y-Kreise auf der y-Achse.

Beispiel:

Der X-Kreis mit der Benennung +2,0 ( $\Omega$ ) schneidet die y-Achse im Punkt -0,5 (S)

Der Y-Kreis mit der Benennung -0,25 (S) schneidet die y-Achse im Punkt +4 ( $\Omega$ ).

In den Funktechnischen Arbeitsblättern Uf 11/2a ist ein Ausschnitt eines solchen Diagramms mit den Koordinaten R und X sowie den G- und Y-Kreisen gezeichnet.

### E. Die Bewegung des Vektors im Diagramm bei Veränderung der Schaltung

Schaltet man dem durch den Vektor  $\alpha$  bestimmten Widerstand weitere parallel oder in Reihe, dann verändert sich die Lage von  $\alpha$  entsprechend Bild 7 und 8.

### F. Erweiterung des Meßbereiches

In den meisten Fällen lassen sich die Schaltungswerte nicht direkt in das Diagramm (Uf 11/2a) einzeichnen. Der Maßstab ist entweder zu vergrößern oder zu verkleinern. Hierfür gilt folgende Regel: Müssen die Maßzahlen an den rechtwinkligen Koordinaten mit dem Faktor a (z. B. 10) multipliziert werden, so sind die Maßzahlen an den Kreisen durch den gleichen Faktor (a) zu dividieren.

## G. Beispiele

### 1. $\pi$ -Glied

Der Eingangsleitwert des  $\pi$ -Gliedes in einer Cascode-Schaltung sei zu bestimmen. Dieses Schaltungsglied liegt zwischen den beiden Trioden der Cascode-Schaltung. Dabei ist die Anode der Katodenbasis-Stufe mit der Katode der nachfolgenden Gitterbasis-Stufe gekoppelt (Bild 9).

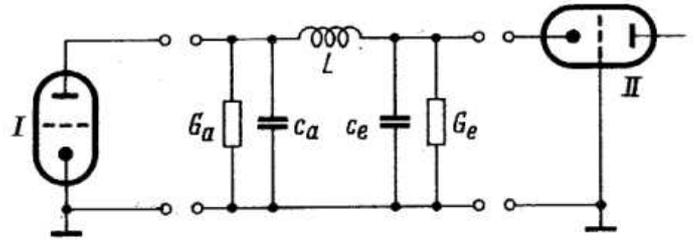


Bild 9. Das Koppelglied ( $\pi$ -Glied) in einer Cascode-Schaltung

Gegeben seien folgende Werte:

$G_a$  = Ausgangsleitwert der Triode

$I = 0,2 \text{ mS}$

$c_a$  = Ausgangskapazität der Triode I =  $3 \text{ pF}$

$L$  = Induktivität des  $\pi$ -Gliedes =  $0,08 \text{ }\mu\text{H}$

$G_e$  = Eingangsleitwert der Triode II =  $6,6 \text{ mS}$

$c_e$  = Eingangskapazität der Triode II =  $6 \text{ pF}$

$f$  = Arbeitsfrequenz =  $200 \text{ MHz}$

Man zeichnet in das Leitwertdiagramm (Bild 12) die Strecke  $0 \dots A = G_e = 6,6 \text{ mS}$ , dann  $A \dots B = Y_e = j\omega c_a = 7,5 \text{ mS}$ . Punkt B gibt also die Leitwert- und Widerstandskordinaten für den Eingangswiderstand bzw. -Leitwert an.

$[G = 6 \text{ mS}, Y = 7,5 \text{ mS}, R = 65 \text{ }\Omega, X = -82 \text{ }\Omega]$

Hierbei ist im Diagramm eine Maßstabänderung durchgeführt worden; dem Wert  $1 \text{ S}$  der x- und y-Achse ist der Wert  $0,01 \text{ S} = 10 \text{ mS}$  zugeordnet worden. Demzufolge sind die Werte der R- und X-Kreise mit 100 zu multiplizieren.

So bestimmt sich Punkt C wie folgt:

Reihenschaltung einer Induktivität bedeutet nach Bild 8 (Fall 12) Bewegung auf einem R-Kreis im Uhrzeigersinn. Das Maß der Drehung ist gegeben durch

$$X = j\omega L = j \cdot 2\pi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,08 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ }\Omega,$$

also von  $B = -82 \text{ }\Omega$  bis  $C = 18 \text{ }\Omega$ .

Die Strecke CD entspricht dem kapazitiven Leitwert von  $3 \text{ pF}$  bei  $200 \text{ MHz} = 3,75 \text{ mS}$ .

Die Strecke DE entspricht dem Leitwert  $0,2 \text{ mS}$ .

Somit ist der Eingangsleitwert des Vierpols gegeben durch:  $(14,4 - j 0,35) \text{ mS}$ .

Der gleiche Wert ergibt sich natürlich auch auf rechnerischem Weg nach FtA Mth 81/3a, Tabelle 3a und Abschnitt k, Bild 15.

### 2. Collins-Filter

Dieses Filter wird durch eine  $\pi$ -Schaltung aus zwei Kapazitäten (Eingang und Ausgang) und eine Induktivität (Längsglied) dargestellt. Es wird vielfach dazu verwendet, den Ausgang eines Senders an eine Antenne (Antennenkabel) anzupassen. In diesem Fall ist es so zu dimensionieren, daß die Oberwel-

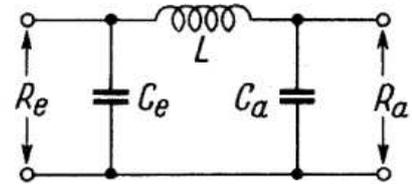


Bild 10. Prinzipschaltung für Beispiel 2

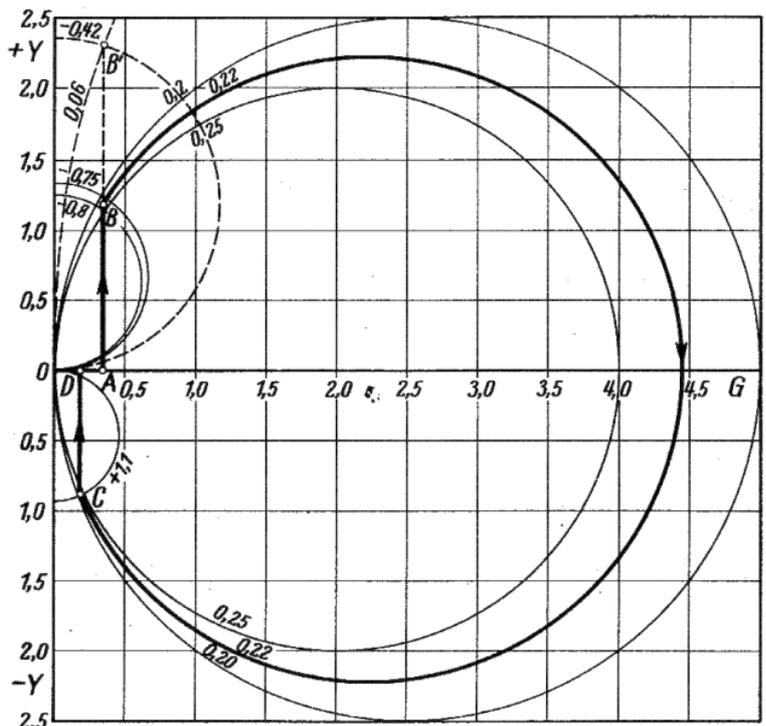


Bild 11. Leitwertdiagramm für Beispiel 2

len des Senders weitgehend unterdrückt werden (vgl. FtA Fi 31).

Für das Beispiel wird die Dimensionierung zugrunde gelegt, die in QRV 1950/9, S. 321 von K. Wydler rechnerisch ermittelt wurde (Bild 10).

$R_e = 550 \Omega$  = Ausgangswiderstand des Senders

$R_a = 300 \Omega$  = Widerstand des Antennenkabels

$L = 10 \mu\text{H}$ ;  $\omega L = 188 \Omega$

$f = 30 \text{ MHz}$

$C_e = 47 \text{ pF}$ ;

$$1/\omega C_e = 113 \Omega = X_e$$

$C_a = 63 \text{ pF}$ ;

$$1/\omega C_a = 86 \Omega = X_a$$

Mit Rücksicht auf die Parallelschaltung im Eingang und Ausgang wird die Leitwertsebene benützt (Bild 11).

Strecke  $OA = G_a = 1/R_a = 1/300 \Omega = 3,3 \text{ mS}$

Strecke  $AB = Y_a = 1/X_a = 1/86 \Omega = 11,7 \text{ mS}$

Punkt B liegt auf dem X-Kreis  $-0,78$ . Der Maßstab für die Leitwertsebene wurde so gewählt, daß der Diagrammzahl 1,0 der Wert  $0,01 \text{ S} = 10 \text{ mS}$  entspricht.

Die Leitwertzahlen sind also durch 100 dividiert. Deshalb müssen die Widerstandszahlen an den Kreisen mit 100 multipliziert werden. Punkt B liegt demnach auf dem Kreis  $-78\Omega$ .

Punkt B ( $-78\Omega$ ) +  $\omega L$  ( $188 \Omega$ ) (Bewegung im Uhrzeigersinn) gibt Punkt C mit  $+110\Omega$ ; das entspricht im Diagramm dem X-Kreis  $+1,1$

Strecke  $CD = Y_e = 1/X_e = 1/113 \Omega = 8,85 \text{ mS}$

Strecke  $DO = G_e = 1/R_e = 1/550 \Omega = 1,82 \text{ mS}$

Mit Hilfe eines solchen Diagrammes läßt sich also sehr schnell die gewünschte Dimensionierung finden oder kontrollieren.

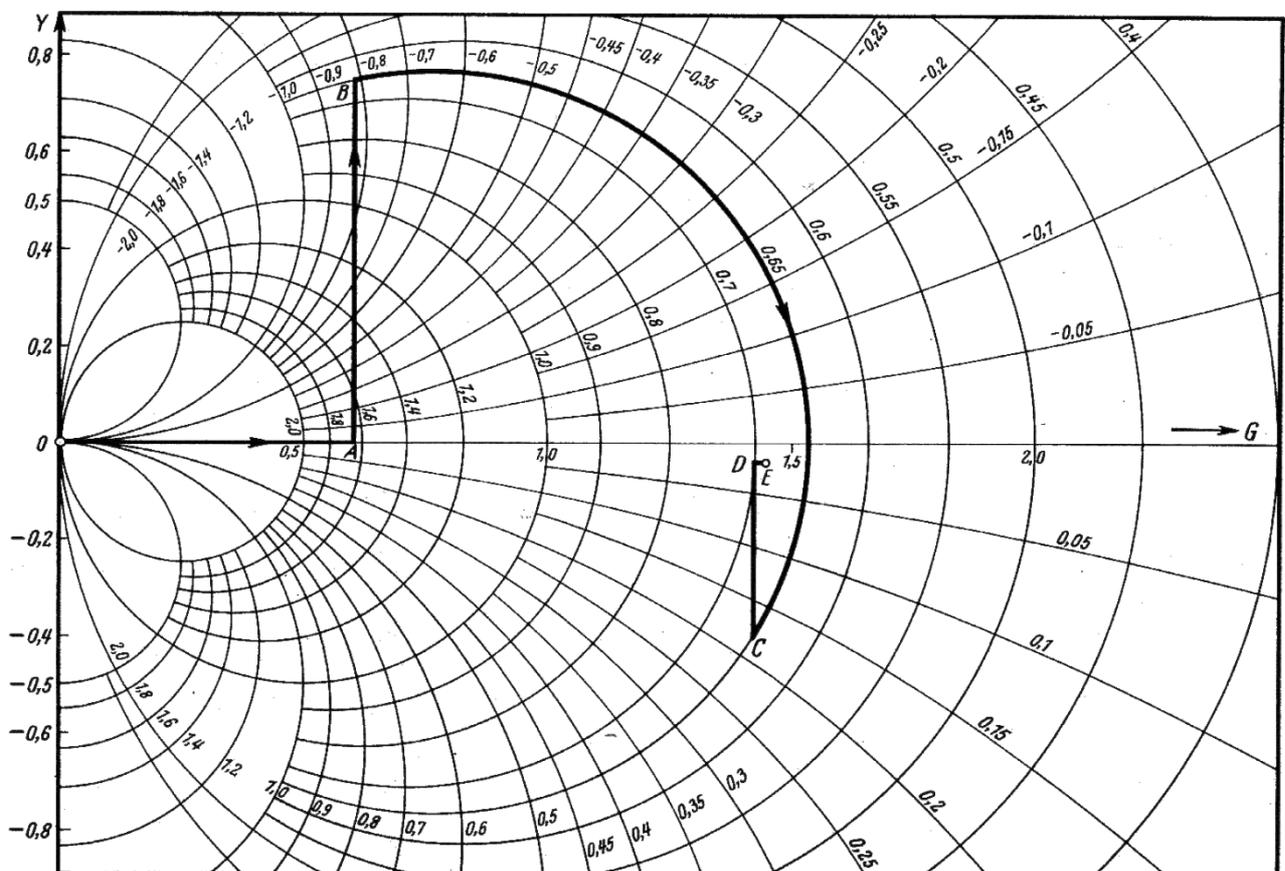
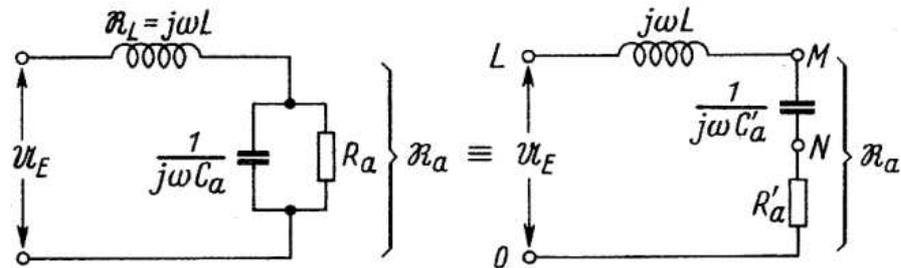


Bild 12. Das Leitwertdiagramm für die Schaltung von Bild 9 (Werte der x- und y-Achse durch 100 dividieren, Werte der R- und X-Kreise mit 100 multiplizieren)

Unterdrückung der zweiten Harmonischen in einem solchen Filter

Zwischen  $\mathfrak{R}_L$  und  $\mathfrak{R}_a$  ergibt sich eine Spannungsteilung (Bild 13). Die Eingangsspannung  $\mathfrak{U}_E$  werde als konstant angenommen.

Mit Hilfe der Leitwertebene werden die Werte für  $R_a$  und  $X_a$  (Parallelschaltung) in  $R'_a$  und  $X'_a$  (Reihenschaltung) verwandelt.



13. Umwandlung der Parallelschaltung  $R_a, X_a$  in die Reihenschaltung  $R'_a, X'_a$

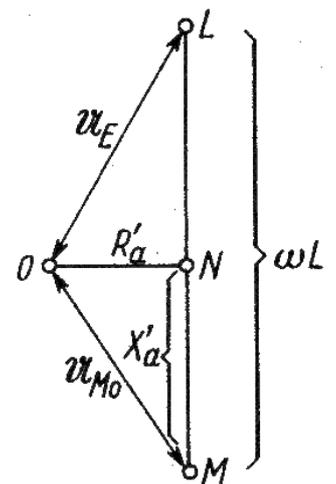
a) Grundwelle

Parallelschaltung	Reihenschaltung
$C_a = 63 \text{ pF}; X_a = 86 \Omega$	$X'_a = 78 \Omega$
$R_a = 300 \Omega$	$R'_a = 22 \Omega$
$\omega L = 188 \Omega$	$\omega L = 188 \Omega$

b) 2. Harmonische

Parallelschaltung	Reihenschaltung
$C_a = 63 \text{ pF}; X_a = 43 \Omega$	$X'_a = 42 \Omega$
$R_a = 300 \Omega$	$R'_a = 6 \Omega$
$\omega L = 376 \Omega$	$\omega L = 376 \Omega$

*Punkt B'  
in Bild 11*



Die unter a) und b) erhaltenen Werte müssen geometrisch addiert werden (Bild 14). Dann verhält sich

für die Grundwelle für die 2. Harmonische

$$\frac{|\mathfrak{U}_{M0}|}{|\mathfrak{U}_E|} = \frac{|\mathfrak{U}_{M0}|}{|\mathfrak{U}_{L0}|} = \frac{40,3}{46} = 0,875 \quad \left| \quad \frac{|\mathfrak{U}_{M0}|}{|\mathfrak{U}_E|} = \frac{21}{167,5} = 0,125 \right.$$

Bild 14. Vektorische Addition der Widerstände (Spannungen)  $R'_a, X'_a, \omega L$  für die Grundwelle und die zweite Harmonische

Anhang

Ausrechnung von Gleichung 4.

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{U}} = \frac{1}{\mathfrak{B} + p \cdot \mathfrak{C}} \quad (4)$$

Zerlegung der Vektoren  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  in die rechtwinkligen Komponenten

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{U}} = \frac{1}{b_1 + j b_2 + p(c_1 + j \cdot c_2)} = \frac{1}{(b_1 + p \cdot c_1) + j(b_2 + p \cdot c_2)} \cdot \frac{(b_1 + p \cdot c_1) - j(b_2 + p \cdot c_2)}{(b_1 + p \cdot c_1) - j(b_2 + p \cdot c_2)}$$

Die x- und y- Komponenten von  $\mathfrak{G}$  sind also

$$\mathfrak{G}_x = \frac{b_1 + p \cdot c_1}{(b_1 + p \cdot c_1)^2 + (b_2 + p \cdot c_2)^2} = x \quad (4a)$$

$$\mathfrak{G}_y = \frac{-(b_2 + p \cdot c_2)}{(b_1 + p \cdot c_1)^2 + (b_2 + p \cdot c_2)^2} = y \quad (4b)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{b_1 + p \cdot c_1}{-(b_2 + p \cdot c_2)^2}; \quad p = \frac{y b_1 + x b_2}{x c_2 + y c_1}$$

p in 4a eingesetzt ergibt:

$$b_1 - \frac{b_2 x + b_1 y}{c_2 x + c_1 y} \cdot c_1 = x \left[ b_1 - \frac{b_2 x + b_1 y}{c_2 x + c_1 y} \cdot c_1 \right]^2 + x \left[ b_2 - \frac{b_2 x + b_1 y}{c_2 x + c_1 y} \cdot c_2 \right]^2$$

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)(c_2 x + c_1 y) = (b_1 c_2 x - b_2 c_1 x)^2 + (b_2 c_1 y - b_1 c_2 y)^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{c_2 x + c_1 y}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{\frac{c_2}{2} x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} + \left( \frac{\frac{c_2}{2}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right)^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{\frac{c_1}{2} y}{b_1 c_2 - b_2 c_1} + \left( \frac{\frac{c_1}{2}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right)^2 = \frac{\left( \frac{c_2}{2} \right)^2 + \left( \frac{c_1}{2} \right)^2}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2}$$

$$\left( x - \frac{\frac{c_2}{2}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right)^2 + \left( y - \frac{\frac{c_1}{2}}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \right)^2 = \frac{\left( \frac{c_1}{2} \right)^2 + \left( \frac{c_2}{2} \right)^2}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2}$$

### Schrifttum:

Dr. Günther Oberdorfer, Die Ortskurventheorie der Wechselstromtechnik,  
Verlag Fr. Deuticke, Wien 1950 S. 23

K. Wydler, QRV 1950, Heft 9, S. 321

Funktechnische Arbeitsblätter Mth 41 - Komplexe Zahlen

Funktechnische Arbeitsblätter Mth 81, Das Rechnen mit Netzwerken

Funktechnische Arbeitsblätter UF 11, 2. Ausgabe, Reihenschaltung - Parallelschaltung

Nachdruck verboten!