FUNK

DIE ZEITSCHRIFT DES FUNKWESENS

SCHRIFTLEITUNG: LOTHAR BAND

WEIDMANNSCHE VERLAGSBUCHHANDLUNG/BERLIN SW68

Bezugspreis monatlich RM 1,- / Beim Postbezug sind hierin die Zeitungsgebühr von 5 Pf. und die Verpackungskosten von 1 Pf. enthalten / Die Zustellungsgebühr beträgt im Monat 4 Pf.

15. JANUAR 1939 **HEFT 2**

Rechnerische Grundlagen der Wechselstromtechnik

Von Dr. S. MANSFELD

Es wird viel und oft mit Vektoren und komplexen Größen in Aufsätzen gerechnet und mit solchen Größen gearbeitet. Allzuoft erlebt man aber, wie das Verständnis von wertvollen Abhandlungen an Zahlen und Rechnungsbegriffen scheitert und Zusammenhänge nicht erkannt werden. Tatsächlich ist die Art des Rechnens mit Vektoren und vor allein mit komplexen Zahlen durchaus neueren Datums und die Unkenntnis kann niemals ein Vorwurf sein. Der nachstehende Aufsatz wendet sich an diejenigen Leser, die wohl mit mathematischen Grundbegriffen vertraut sind, jedoch im Wissen von dem Wesen und den Zusammenhängen der rechnerischen Grundlagen der Wechselstromtechnik noch Lücken haben.

Vektor und komplexe Zahl

Für die rechnerische Behandlung von Wechselstromproblemen hat sich die Darstellung der Wechselstromgrößen durch Vektoren und ihre symbolische Darstellung durch komplexe Zahlen als äußerst fruchtbar erwiesen.

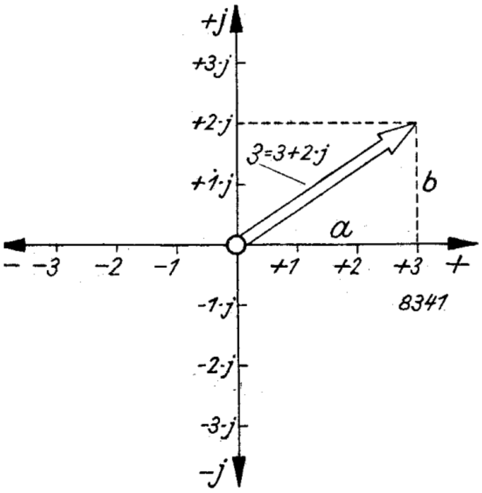

Abb. 1

Die Physik kennt neben den Skalaren, das sind Größen, die nur durch ihren Zahlenwert bestimmt werden (z. B. Gewicht, Länge, Temperatur), noch die Vektoren. Vektoren sind physikalische Größen, denen neben ihrem Zahlenwert noch eine bestimmte Richtung zu eigen ist; es sind gerichtete Größen. Dabei ist es üblich, in der Schreibweise die gerichteten Größen durch deutsche (Fraktur-) Buchstaben darzustellen. Die Größe und Richtung eines Vektors kann rechnerisch und vor allem vorteilhafterweise zeichnerisch bestimmt werden. In der graphischen Darstellung eines Vektors ist seine Größe und Richtung durch einen Maßstab und einen starren Bezugspunkt gegeben. In der Wechselstromtechnik werden die durch Vektoren dargestellten Wechselstromgrößen in eine Zahlenebene (Koordinatenkreuz) eingeordnet. Die verwendete Gauss'sche Zahlenebene hat für jede vorkommende Zahl einen bestimmten Punkt, der in einem der vier Quadranten des Achsenkreuzes liegt (Abb. 1). Die waagerechte Achse (Abszisse) trägt die positiven und negativen reellen Zahlen, die senkrechte Achse (Ordinate) die positiven und negativen imaginären Zahlen. Imaginäre Zahlen entstehen beim Ziehen der Quadratwurzel aus einer negativen Zahl: $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \ast \sqrt{-1} = 3 \ast \sqrt{-1} = 3 \ast j.$

Es ist deshalb festgesetzt : $\sqrt{-1} = j.$

j ist die „imaginäre Einheit" und ist ein zahlenmäßiger Begriff. $j^2 = -1,$
$j^3 = -j.$

Durch Quadrieren entsteht wieder eine reelle Zahl, nämlich die Zahl —1. Die Summe aus einer reelen und einer imaginären Zahl ist eine komplexe Zahl mit der allgemeinen Form :

$$a + j * b \, .$$

In Abb. 1 ist innerhalb der Zahlenebene die komplexe Zahl ($3 + j \cdot 2$) als Beispiel eingezeichnet, jedoch nicht als Punkt, sondern als eine gerichtete Strecke. Damit sei gleich für alle Rechnungen festgelegt, daß mit einer komplexen Zahl nicht ein Punkt, sondern eine gerichtete Strecke dargestellt wird. Der Vektor ist eine solche gerichtete Strecke, und er hat demnach die zahlenmäßige Formulierung:

$$\mathfrak{J} = a + j \cdot b.$$

Dabei ist a die Projektion auf die Abszisse, *b* die Projektion des Vektors auf die Ordinate (Abb. 1). Der absolute Betrag ist also :

$$|\mathfrak{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zur Kennzeichnung eines Vektors gehören stets zwei Größen. Hier sind es die beiden Projektionen.

Die zeichnerische Darstellung der Vektoren in Abb. 2 zeigt in deutlicher Weise eine wichtige Rechenoperation.

In Worten zeigt das Bild, daß die Multiplikation eines Vektors mit *j* eine Drehung um 90° (oder in Bogenmaß $\pi/2$) im Gegenzeigersinn (positiv), die Multiplikation mit —*j* eine Drehung des Vektors um 90° im Uhrzeigersinn (negativ) bedeutet.

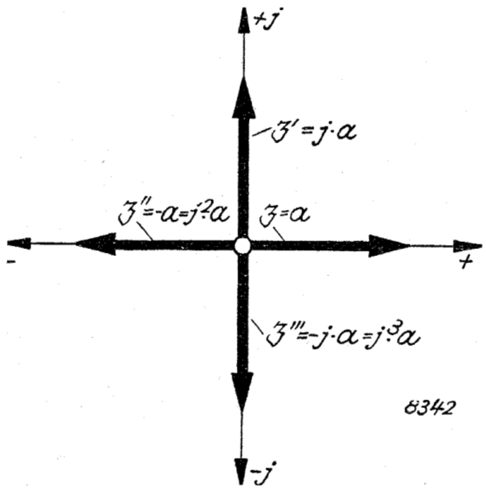

Abb. 2

Die Darstellung der Wechselstromgrößen

In der Wechselstromtechnik sind die Fälle, in denen sich Spannungen und Ströme zeitlich nach einer Sinusfunktion ändern, von besonderer Wichtigkeit. Das Gesetz, nach dem sich eine Stromgröße in Abhängigkeit von der Zeit rein sinusförmig ändert, hat die Form:

$$i = I \cos(\omega t + \varphi i).$$

Diese Größe ist dargestellt durch die Projektion auf die Abszisse des mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit *(ωt)* umlaufenden Vektors von der Amplitude *I* (absolute Größe). Der Winkel φ_i gibt die Lage des Vektors zur Achse bei einer bestimmten Zeit; es ist der Phasenwinkel. Siehe Abb. 3.

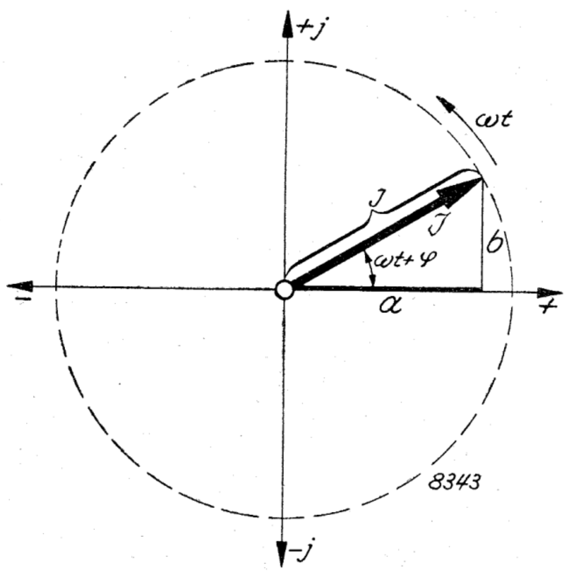

Abb. 3

$\mathfrak{J}$ stellt den umlaufenden Stromvektor mit dem Absolutwert $|\mathfrak{J}| = I$ dar. Während *i* als Projektion eine Komponente und einen Augenblickswert darstellt, ergibt $\mathfrak{J}$ die gerichtete Größe mit dem Betrag der Amplitude. In der Zahlenebene mit den Koordinaten für reelle und imaginäre Zahlen erhält der Vektor die Form:

$$\mathfrak{J} = a + j \cdot b.$$

Wie oben schon ausgeführt, ist durch diese Gleichung jeder in der Zahlenebene liegende beliebige Vektor bestimmt.

Werden in der letzten Gleichung a und b durch die entsprechenden trigonometrischen Beziehungen ausgedrückt, so wird $\mathfrak{J} = I \cos(\omega t + \varphi i) + j * I \sin(\omega t + \varphi i).$ $|\mathfrak{J}| = I$

Nach dem Taylorschen Satz können die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktionen in Reihen entwickelt werden. Das Ergebnis führt zu der Gleichung:

$$\cos x + j \cdot \sin x = e^{jx}$$

(e ist bekanntlich die Basis der natürlichen Logarithmen und ist gleich 2,71828). Dementsprechend wird die Gleichung gebildet:

$$\cos(\omega t + \varphi i) + j * \sin(\omega t+\varphi i) = e^{j(\omega t + \varphi i)}$$

Übertragen auf die Gleichung des Stromvektors ergibt der symbolische Ausdruck für den Vektor:

$$\mathfrak{I} = I\,[\cos(\omega t+\varphi i) + j \cdot \sin(\omega t+\varphi i)] = I\,e^{j(\omega t + \varphi i)}$$

In dieser Gleichung ist der Vektor $\mathfrak{I}$ durch seinen Absolutwert und durch den Winkel, den er mit der positiven reellen Achse bildet, ausgedrückt. Der Augenblickswert des Stromvektors lautete:

$$i = I\cos(\omega t+\varphi i).$$

Bei dem Übergang von der symbolischen Rechenweise zu der gewöhnlichen mit den Augenblickswerten der Wechselstromgrößen ist nur das reelle Glied der symbolischen Gleichung zu verwenden. — Eine Auflösung der obenstehenden Gleichung für den Vektor ergibt:

$$\mathfrak{I} = I\,e^{j(\omega t + \varphi i)} = I\,e^{j\varphi i} \cdot e^{j\omega t}$$

und ganz entsprechend lautet die Gleichung für den Vektor der Spannung:

$$\mathfrak{U} = U\,e^{j(\omega t + \varphi u)} = U\,e^{j\varphi u} \cdot e^{j\omega t}$$

Es ist in der Behandlung der Wechselstromprobleme nicht die Größe der Winkelgeschwindigkeit, als Ursache der Vektorenrotation, von Belang; denn alle an einem Vorgang beteiligten Vektoren unterliegen der gleichen Frequenz und rotieren somit alle mit gleicher Geschwindigkeit. Wesentlich und von Interesse sind die Höchstwerte der Wechselstromgrößen und ihre Phasenverschiebungen zueinander. Deshalb richtet sich das Augenmerk nicht auf den Faktor e^{jwt}, sondern auf den Amplitude und Phase umfassenden Ausdruck $I\,e^{j\varphi i}$ bzw. $U\,e^{j\varphi u}$. In diesen Beziehungen fällt die Zeit t vollständig heraus. Es verbleiben allein Gleichungen zwischen den gerichteten Amplituden, die geometrisch in der Zahlenebene durch einen ruhenden Vektor dargestellt werden, der den absoluten Betrag $|\mathfrak{I}| = I$ und den Phasenwinkel φ gegen die positive reelle Achse besitzt. In obigen Gleichungen stellen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{U}$ vollständige Symbole dar. Die des Frequenzgliedes *(e^{jwt})* beraubten Symbole sind die „reduzierten" Symbole. Da in der Literatur meist mit den reduzierten Symbolen gerechnet wird und dort diese mit $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{U}'$ bezeichnet werden, seien die vollständigen Symbole im Verlaufe von Rechnungen mit $\mathfrak{I}'$ und $\mathfrak{U}'$ gekennzeichnet.

$$\mathfrak{I} = I\,e^{j\varphi i}$$

$$\mathfrak{I}' = \mathfrak{I}\,e^{j\omega t} = I\,e^{j\varphi i} \cdot e^{j\omega t}.$$

Der Ohmsche Widerstand im Wechselstromkreis

Eine rein sinusförmige Wechselspannung mit dem Augenblickswert u wirke auf einen Ohmschen Widerstand *R*. Da *R* konstant ist, muß auch der Strom *i* sinusförmig verlaufen. Es besteht die Beziehung:

$$u = i \cdot R\,.$$

Beim Übergang in die symbolische Methode werden für die Augenblickswerte (Zeitwert, reelle Komponente des Vektors) u und *i* die Ausdrücke $\mathfrak{U}\,e^{j\omega t}$ und $\mathfrak{I}\,e^{j\omega t}$ gesetzt, wobei $\mathfrak{U} = U\,e^{j\varphi u}$ und $\mathfrak{I} = I\,e^{j\varphi i}$ ist. Die Gleichung lautet dann:

$$\mathfrak{U}\,e^{j\omega t} = \mathfrak{I}\,e^{j\omega t} R\,.$$

Wird die Gleichung durch das Frequenzglied eiwt dividiert, so ist:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{I} \cdot R$$

oder durch Amplitude und Argument ausgedrückt:

$$U\,e^{j\varphi u} = I\,e^{j\varphi i} \cdot R\,.$$

In der letzten Beziehung wird *R* mit der Amplitude und dem Phasenglied multipliziert. Das

Phasenglied bleibt dabei unverändert und als Beziehung der Amplituden gilt:

$$U = I \bullet R$$

und für die Argumente:

$$e^{j\varphi u} = e^{j\varphi i}$$

$$\varphi_u = \varphi_i \,.$$

Die Phasenwinkel von Strom und Spannung sind also gleich, eine Phasenverschiebung ist durch den rein Ohmschen Widerstand nicht entstanden.

Die Gleichung mit den Wechselstromgrößen $\mathfrak{U} = \mathfrak{I} \cdot R$ zeigt bereits, daß sie vollkommen dem Ohmschen Gesetz für Gleichstrom entspricht, nur daß hier U und $\mathfrak{I}$ nicht reelle, sondern komplexe Größen bedeuten, die eine reelle und eine imaginäre Komponente haben.

Die Selbstinduktion im Wechselstromkreis

Wird an eine verlustfreie Selbstinduktion L eine Wechselspannung angelegt, so fließt ein Strom i, der in L eine EMK hervorruft mit dem Augenblickswert u:

$$u = L \frac{di}{dt} \;.$$

Dieser Wert ist gleich der angelegten Spannung und ihr entgegengesetzt. In der symbolischen Schreibweise heißt die Gleichung:

$$\mathfrak{U} e^{j\omega t} = L \cdot \frac{d \mathfrak{I} e^{j\omega t}}{dt}$$

und differenziert

$$\mathfrak{U} e^{j\omega t} = j\omega L \cdot \mathfrak{I} e^{j\omega t}$$

Die Gleichung durch das Frequenzglied dividiert:

$$\mathfrak{U} = j\omega L \bullet \mathfrak{I} \;.$$

Für die Amplitude von Strom und Spannung folgt:

$$U = \omega L \cdot I$$

$$I = \frac{\omega L}{U}.$$

Diese Form der Gleichung gleicht dem Ohmschen. Gesetz $I = U / R$. Demnach wird *(ω L)* als der induktive Widerstand, Induktanz oder induktive Reaktanz bezeichnet. Die Gleichung $\mathfrak{U} = j\ \omega\ \mathrm{L} \cdot \mathfrak{I}$ sagt von der Phase von $\mathfrak{U}$ gegenüber $\mathfrak{I}$ sofort aus, daß $\mathfrak{U}$ gegen $\mathfrak{I}$ um 90° (π/2) voreilt; denn die Multiplikation des Vektors $\mathfrak{I}$ mit j besagt nach den früheren Ausführungen, daß eine Drehung des Vektors $\mathfrak{I}$ im Gegenzeigersinn stattgefunden hat, wenn man die Richtung von $\mathfrak{U}$ erhalten will. Der induktive Widerstand ωL ist für $\omega = \infty$, also für Wechselstrom mit unendlich hoher Frequenz, unendlich groß. Je kleiner die Frequenz wird, um so kleiner wird auch $\omega\ L$ und bei der Frequenz Null wird der induktive Widerstand Null. Der induktive Widerstand liegt in der Richtung der imaginären Achse. Es ist ein Blindwiderstand; denn das Produkt aus dem Quadrat des Stromes und dem Blindwiderstand weist keine tatsächliche Leistung auf, sondern nur eine Blindleistung, die in diesen Widerständen nicht verbraucht, sondern zurückgewonnen wird. Die Blindleistung dient bei der Selbstinduktion zum Aufbau des magnetischen Feldes, bei der Kapazität zur Herstellung des elektrischen Feldes.

Die Kapazität im Wechselstromkreis

Ein verlustfreier Kondensator habe die Kapazität C. Wird der Kondensator durch die Elektrizitätsmenge q auf die Spannung u aufgeladen, so besteht die Beziehung:

$$q = C \cdot u \;.$$

Für den Augenblickswert der Spannung:

$$u = q / C \;.$$

Die in der Zeit dt dem Kondensator zugeführte Elektrizitätsmenge ist:

$$d\,q = i\;dt$$

Die auf dem Kondensator zur Zeit t aufgebrachte Ladung ist:

$$q = \int_0^t i\;dt\;.$$

Die Spannung u wird:

$$u = \frac{1}{C}\int i\;dt\;.$$

In der symbolischen Schreibweise hat die Gleichung die Form:

$$\mathfrak{U}\;e^{j\omega\,t} = \frac{1}{C}\int \mathfrak{I}\;e^{j\omega\,t}dt = \frac{1}{j\omega C}\mathfrak{I}e^{j\omega\,t}$$

Durch das Frequenzglied dividiert entsteht der Ausdruck:

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{j\omega C}\;\mathfrak{I}$$

Und für die Amplituden

$$U = \frac{I}{\omega C}\;.$$

$\frac{1}{\omega C}$ ist der kapazitive Widerstand oder kapazitive Reaktanz.

Die Multiplikation von $\mathfrak{I}$ mit $\frac{1}{j}$ sagt aus, daß der Strom $\mathcal{I}$ der Spannung $\mathfrak{U}$ um 90° vorauseilt; denn eine Multiplikation mit $\frac{1}{j}$ bedeutet eine Drehung des betreffenden Vektors im Uhrzeigersinn. Der kapazitive Blindwiderstand $\frac{1}{\omega C}$ wird für ω = 2 πf unendlich groß, da $\frac{1}{0} = \infty$. Gleichstrom ist als Wechselstrom mit der Frequenz Null anzusehen, also bietet der Kondensator dem Gleichstrom einen unendlich großen Widerstand, d. h. er ruft praktisch eine Unterbrechung des Stromkreises hervor. Bei einer unendlich hohen Frequenz eines Wechselstromes wird die Kreisfrequenz $\omega = \infty$ und der kapazitive Widerstand gleich Null, da $1/\infty = 0$ ist. Der Kondensator wirkt wie ein Kurzschluß, eine Kapazitätswirkung ist nicht vorhanden. Der kapazitive Widerstand ist also um so größer, je kleiner die Kapazität ist.

Die Serienschaltung von R, L und C im Wechselstromkreis

Zur Bestimmung der Beziehungen von Strom, Spannung und Widerstand in einer Schaltung, die Ohmschen Widerstand *R*, Induktivität *L* und Kapazität C enthält, brauchen nur die bisherigen Rechnungen zusammengefaßt zu werden. — Eine Wechselspannung mit dem Augenblickswert u wirke auf eine Serienschaltung von *R*, *L* und C. Die Spannung u ist dann:

$$u = i\cdot R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\;dt$$

Die Spannung u ist eine Summe der Spannungen über *R*, *L* und *C*, da der Strom *i* in der Serienschaltung durch alle Teile in gleicher Stärke fließt. In der symbolischen Schreibweise erhält die Gleichung die Form:

$$\mathcal{U}e^{j\omega t} = \mathcal{I}e^{j\omega t}\cdot R + L\cdot\frac{d\,\mathcal{I}e^{j\omega t}}{dt} + \frac{1}{C}\cdot\int\mathcal{I}e^{j\omega t}dt$$

$$\mathcal{U}e^{j\omega t} = \mathcal{I}e^{j\omega t}\cdot R + j\omega L\cdot\mathcal{I}e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C}\cdot\mathcal{I}e^{j\omega t}$$

$$\mathfrak{U} = R \cdot \mathfrak{I} + j\omega L \cdot \mathfrak{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathfrak{I}$$

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \mathfrak{I} \cdot \mathfrak{R}\ .$$

Der resultierende Widerstand ist bestimmt mit der Größe :

$$\mathfrak{R} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{j\omega C}\right).$$

$\mathfrak{R}$ ist der gerichtete Widerstand. Sein absoluter Betrag $|\mathfrak{R}|$ ist gleich dem absoluten Verhältnis $|\mathfrak{U}|$ zu $|\mathfrak{I}|$, sein Phasenwinkel φ gleich der Phasenverschiebung der Spannung gegenüber dem Strom. $|\mathfrak{R}|$ wird auch als Scheinwiderstand bezeichnet, der sich aus der Wirkkomponente und der Blindkomponente zusammensetzt (Abb. 4).

$R_W = |\mathfrak{R}| \cos \varphi_r$

$R_b = |\mathfrak{R}| \sin \varphi_r$

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{R_w^{\ 2} + R_b^{\ 2}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)^2}$$

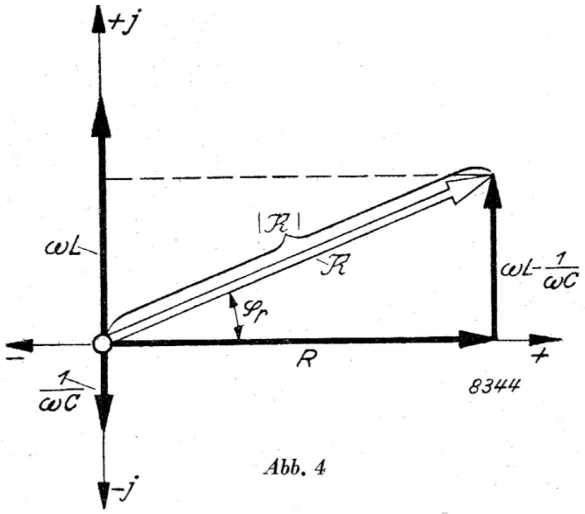

Abb. 4

Der Wirkwiderstand liegt auf der reellen Achse und der Blindwiderstand $R_b = \omega L - \frac{1}{j\omega C}$ auf der imaginären Achse, also senkrecht zum Wirkwiderstand. Der Wirkwiderstand ist die Komponente des Scheinwiderstandes, die mit dem Quadrat des Stromes multipliziert die Wirkleistung ergibt, die in dem Stromkreis verbraucht wird. Die Wirkleistung bestimmenden Größen liegen in gleicher Richtung und haben keine Phasendifferenz. Die Blindkomponente dagegen hat eine Phasenverschiebung von 90° und bildet eine Blindleistung, die in dem betreffenden Stromsystem hin und her pendelt, ohne dabei eine Arbeit zu leisten. Der Phasenwinkel zwischen dem Widerstandsvektor und der Abszisse ist in der trigonometrischen Beziehung:

$$tg\varphi_r = \frac{R_b}{R_w} = \frac{\omega L - \frac{1}{j\omega C}}{R}$$

Die Amplitudenwerte gehen aus nachstehendem Ausdruck hervor : $U = I \cdot |\mathfrak{R}|$

Die Phasenglieder sind: $e^{j\varphi u} = e^{j\varphi i} \cdot e^{j\varphi r} = e^{j(\varphi i + \varphi r)}$

Die Spannung U ist gegen den Strom $\mathfrak{I}$ im voreilenden Sinne (Gegenzeigersinn) um den Winkel φ_r verschoben. Ist φ_r jedoch negativ, so ist die Verschiebung entgegengesetzt (Uhrzeigersinn). Dabei gibt es drei Möglichkeiten:

$\omega L > \frac{1}{j\omega C}$: Der induktive Widerstand überwiegt, φ_r ist positiv.

$\omega L < \frac{1}{j\omega C}$: Der kapazitive Widerstand überwiegt, φ_r ist negativ.

$\omega L = \frac{1}{j\omega C}$: $\varphi_r = 0$ Induktiver und kapazitiver Widerstand sind entgegengesetzt gleich und heben sich auf. Der Stromkreis arbeitet so, als wäre nur der Ohmsche Widerstand *R* vorhanden. Es liegt der Fall der sog. Spannungsresonanz vor.

Gerichteter Widerstand und gerichteter Leitwert

Aus den durchgeführten Rechnungen geht schon der Vorteil der Rechenweise mit komplexen Größen hervor. Die Gleichungen entsprechen in der Art vollkommen den Gleichstromgleichungen, nur daß an Stelle von reellen Werten hier komplexe Größen auftreten. Das Frequenzglied $e^{j\omega t}$ fiel in den Gleichungen heraus, und es verblieben nur die Beziehungen der reduzierten Symbole, die lediglich Aussagen über Höchstwerte (Amplitude) und Phasen machten. In den meisten Fällen sind auch nur diese Angaben von Interesse.

Die Widerstandsgröße ist nicht wie die Zeitvektoren $\mathcal{U}e^{j\omega t}$ und $\mathcal{J}e^{j\omega t}$ ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufender Vektor, sondern eine zeitlich konstante, komplexe Größe, die bei der Multiplikation mit dem umlaufenden Zeitvektor als Produkt wiederum einen umlaufenden Vektor ergibt, der nur in Größe und Phase geändert ist.

Die Gleichung für den Widerstand $\mathfrak{R}$ lautete:

$$\mathfrak{R} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{j\omega C}\right).$$

Die Gleichung heißt in der allgemeinen Form:

$$\mathfrak{R} = R+jX$$

und besteht aus dem reellen und dem imaginären Teil, wobei

$$X = \omega L - \frac{1}{j\omega C} \ .$$

Der Absolutwert hat die Größe:

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

und der Phasenwinkel:

$$tg\varphi_r = \frac{X}{R} \ .$$

Aus dem Widerstand kann dessen reziproker Wert, der L e i t w er t gebildet werden.

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{R} \qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{G} \ .$$

$\mathfrak{G}$ ist der reziproke Widerstand oder Leitwert. Der Übergang vom Widerstand zum Leitwert wird als „Inversion" bezeichnet. Der Ausdruck wird nach bekannter Weise :

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{U} \cdot \frac{1}{R + jX}$$

Durch Erweitern der Gleichung mit dem konjugiert komplexen Wert *(R — j X)* ergibt sich:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}\frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \mathfrak{U}\left(\frac{R}{R^2 + X^2} + j\frac{-X}{R^2 + X^2}\right) = \mathfrak{U} \cdot (G + jY),$$

wenn für *G* eingesetzt wird:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

und für Y:

$$Y = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

Dadurch ist die Gleichung des Leitwertvektors bestimmt mit :

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = G + jY \ .$$

Der absolute Betrag des Leitwertvektors, der Scheinleitwert, ist

$$|\mathfrak{G}| = \sqrt{G^2 + Y^2} = \frac{1}{|\mathfrak{R}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \ .$$

Siehe dazu Abb. 5. Der Winkel zwischen Widerstandsvektor und Abszisse ist gleich und entgegengesetzt dem Winkel zwischen Leitwertvektor und Abszisse, da:

$$tg\varphi = \frac{X}{R} \qquad \text{tgx}=\frac{Y}{G} = \frac{-X}{R^2+X^2}\cdot R\frac{R^2+X^2}{R} = -\frac{X}{R} \qquad\qquad (x = -\varphi).$$

Die Gleichung:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{U}\left(G + jY\right) = \mathfrak{U}\cdot G + j\mathfrak{U}Y$$

sagt aus, daß der Strom $\mathfrak{I}$ aus der Summe zweier gerichteter Größen (Vektoren) besteht, deren eine mit $\mathfrak{U}$ in Phase ist ($\mathfrak{U} \cdot G$), die andere aber um 90^0 gegen $\mathfrak{U}$ verschoben ist, da eine Multiplikation mit j vorliegt. Der Strom $|\mathfrak{I}|$ ist der scheinbare Strom, der aus der Wirkkomponente und der senkrecht dazu stehenden Blindkomponente besteht. Entsprechend gibt $\mathfrak{G}$ den Leitwertvektor an. $|\mathfrak{G}|$ ist der absolute Betrag (Scheinleitwert), G der Wirkleitwert, Y der Blindleitwert, der in der Richtung der imaginären Achse liegt.

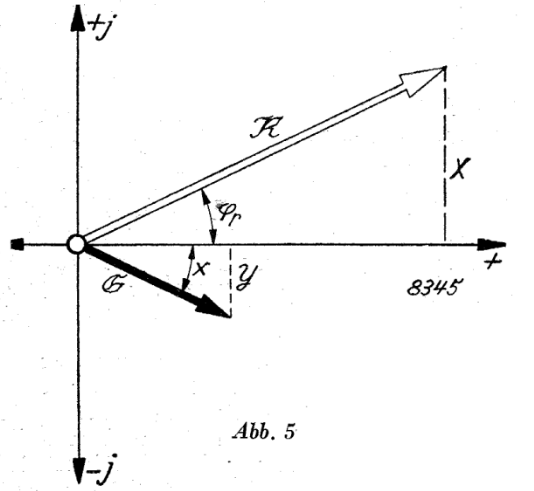

Abb. 5

Die Spannungsgleichung der Serienschaltung

$$\mathfrak{U} = R\cdot\mathfrak{I} + \mathrm{j}\omega L\cdot\mathfrak{I} + \frac{1}{j\omega C}\cdot\mathfrak{I}$$

ließ schon erkennen, daß die Gesamtspannung aus drei Teilspannungen arithmetisch addiert wird:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_R + \mathfrak{U}_L + \mathfrak{U}_C = \mathfrak{I}\cdot\left(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3\right)$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 \ .$$

Die gerichteten Größen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{R}$ werden genau so addiert wie reine Gleichstromgrößen, nur muß stets vor Augen gehalten werden, daß es sich eben um komplexe Größen handelt. Äußerlich ist dies an der Schreibweise mit deutschen Buchstaben zu erkennen. Dagegen ist bei der graphischen Methode der Vektorenrechnung eine solche Addition rein geometrisch durchzuführen. Bei der symbolischen Rechenweise behalten also die in der Gleichstromtechnik bekannten Gesetze und Regeln ihre Gültigkeit, wie Ohmsches Gesetz und die Kirchhoffschen Regeln. Ferner kann mit Hilfe der 2- und 4-Poltheorie jedes Leitungsnetz und Maschenwerk in klarer Weise berechnet werden.

Wie soeben die Serienschaltung betrachtet wurde, soll im folgenden noch die Parallelschaltung einer Betrachtung unterzogen werden. — Aufgestellt war die Beziehung: $\mathfrak{I} = \mathfrak{U}\cdot\mathfrak{G}$

Der Strom ist proportional der Spannung und dem Leitwert $\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}}$. Sind mehrere Widerstände parallel geschaltet oder besser gesagt, liegen mehrere Leitwerte parallel, so ist die Spannung $\mathfrak{U}$ an allen Teilen der Schaltung die gleiche, dagegen sind die Teilströme abhängig von dem jeweiligen Leitwert (Abb. 6). Sie sind:

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{U}\cdot\mathfrak{G}_1 \qquad \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{U}\cdot\mathfrak{G}_2$$

Der Gesamtstrom ist die Summe dieser Einzelströme:

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{U}\left(\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2\right) = \mathfrak{U}\cdot\mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{R}_1\cdot\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2}$$

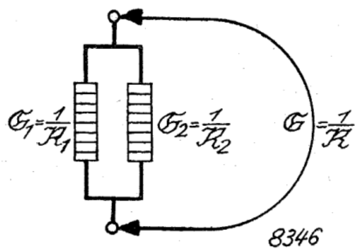

Abb. 6

Der Gesamtleitwert einer Parallelschaltung von Leitwerten stellt die arithmetische Summe dar.

Entsprechend kann natürlich auch eine Serienschaltung mit den Leitwerten berechnet werden (Abb. 7). Wie schon ausgeführt, wird für die Serienschaltung der Gesamtwiderstand: $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$

und für den Gesamtleitwert folgt daraus:

$$\frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{1}{\mathfrak{G}_1} + \frac{1}{\mathfrak{G}_2} \qquad\qquad \mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{G}_1\cdot\mathfrak{G}_2}{\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2}$$

Hintereinander geschaltete Widerstände geben die Spannungen bezogen auf die Stromeinheit an; denn sie werden alle vom gleichen Strom durchflossen. Parallel geschaltete Leitwerte geben den Strom an bezogen auf die gleiche Spannung, die an allen einzelnen Leitwerten liegt

Ob in der Behandlung von Parallelschaltungen und gemischten Schaltungen mit Widerständen oder Leitwerten gerechnet wird, entscheidet meist erst die Durchrechnung selbst. Im allgemeinen werden die Serienschaltungen mit Widerständen, die Parallelschaltungen mit Leitwerten berechnet.

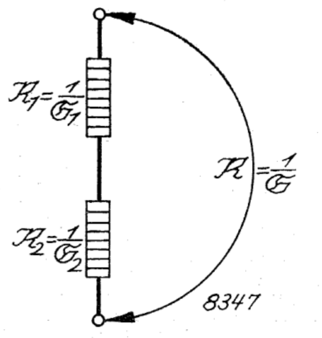

Abb. 7

Auch diese letzten Betrachtungen ergeben die Einfachheit des Rechnens mit Wechselstromgrößen; die Rechnung zeigt keine größeren Schwierigkeiten als die mit Gleichstromgrößen.

Zeichnungen vom Verfasser

---

*Aus FUNK Heft 2/1939 Seiten 29-33, i*m Original 2-spaltig. Digitalisiert 08/2016 von Eike Grund für http://www.radiomuseum.org

Anmerkung: Im Original wird die Amplitude des Stromes mit dem Buchstaben "J" bezeichnet. Um Irrtümer (z.B. Verwechsung mit "j") zu vermeiden, wurde J durch "I" ersetzt